

11 偏微分 演習問題解答例

基本演習 1 (教科書 問題 6.4) 次の各関数を偏微分して下さい。

$$(4) z = x \log \frac{y}{x} \quad (5) z = e^{3x} \sin 2y \quad (6) z = \text{Sin}^{-1} \frac{x}{y} \quad (y > 0)$$

(4) これは変形してから偏微分した方が良いかも知れません：

$$\begin{aligned} z &= x \log \frac{y}{x} = x \log y - x \log x \\ z_x &= \log y - \log x - 1 = \log \frac{y}{x} - 1 \\ z_y &= \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

(5) これが案外一番簡単かも知れません。

$$z_x = 3e^{3x} \sin 2y, \quad z_y = 2e^{3x} \cos 2y$$

(6) これは逆三角関数の導関数を知らないと苦労するかも知れませんね。

$$(\text{Sin}^{-1} t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

上の結果を流用すれば、 $y > 0$ に注意して

$$z_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

ですか。

もし逆三角関数の微分を忘れてしまったら、直接計算するしかありません。 z_y はそう云った状況を想定して計算してみましょう。

$$z = \text{Sin}^{-1} \frac{x}{y}$$

において、両辺の sine をとれば、逆関数の定義から $\sin z = \frac{x}{y}$ ですので、この両辺を y で偏微分して

$$\begin{aligned} \cos z \cdot z_y &= -\frac{x}{y^2} \\ z_y &= -\frac{x}{y^2 \cos z} = -\frac{x}{y^2 \cos \text{Sin}^{-1} \frac{x}{y}} \end{aligned}$$

です。ここで、

$$\begin{aligned} \left(\cos \text{Sin}^{-1} \frac{x}{y}\right)^2 + \left(\sin \text{Sin}^{-1} \frac{x}{y}\right)^2 &= 1 \\ \left(\cos \text{Sin}^{-1} \frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 &= 1 \\ \left(\cos \text{Sin}^{-1} \frac{x}{y}\right)^2 &= 1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 \end{aligned}$$

ですが、逆三角関数の定義によれば $-\frac{\pi}{2} \leq \text{Sin}^{-1} \frac{x}{y} \leq \frac{\pi}{2}$ なので、この範囲では cosine は非負であって

$$\cos \text{Sin}^{-1} \frac{x}{y} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

が分かります。従って

$$z_y = -\frac{x}{y^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} = -\frac{x}{y \sqrt{y^2 - x^2}}$$

が得られます (再び $y > 0$ に注意)。

□

基本演習 2 (教科書 問題 6.5) 次の各関数の第2次偏導関数を求めて下さい。

$$(3) z = x \log \frac{y}{x} \quad (4) z = \text{Sin}^{-1} \frac{x}{y} \quad (y > 0)$$

(3)

$$z = x \log y - x \log x$$

$$z_x = \log y - \log x - 1$$

$$z_y = \frac{x}{y}$$

$$z_{xx} = -\frac{1}{x}$$

$$z_{xy} = z_{yx} = \frac{1}{y}$$

$$z_{yy} = -\frac{x}{y^2}$$

(4) $y > 0$ に注意して下さい。

$$z_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$$

$$z_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$$

$$z_{xx} = \left(-\frac{1}{2}\right)(y^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = \frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}^3}$$

$$z_{xy} = z_{yx} = \left(-\frac{1}{2}\right)(y^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}(2y) = -\frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}^3}$$

$$\begin{aligned} z_{yy} &= \frac{x}{y^2(y^2 - x^2)} \left(\sqrt{y^2 - x^2} + y \frac{2y}{2\sqrt{y^2 - x^2}} \right) \\ &= \frac{2xy^2 - x^3}{y^2\sqrt{y^2 - x^2}^3} \end{aligned}$$

基本演習 3 (教科書 練習問題 6.1) 次の各関数を偏微分して下さい。

$$(1) z = \frac{x-y}{x+y} \quad (2) z = xy\sqrt{x^2 - y^2}$$

$$(3) z = \frac{e^x}{x^2 + y^2} \quad (4) z = \log_y x$$

(1)

$$z_x = \frac{1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2},$$

$$z_y = \frac{(-1)(x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} = -\frac{2x}{(x+y)^2}.$$

(2)

$$z_x = y\sqrt{x^2 - y^2} + xy \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} 2x = y\sqrt{x^2 - y^2} + \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{2x^2 y - y^3}{\sqrt{x^2 - y^2}},$$

$$z_y = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y) = x\sqrt{x^2 - y^2} - \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{x^3 - 2xy^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

(3)

$$z_x = \frac{e^x(x^2 + y^2) - e^x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$z_y = -\frac{2ye^x}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(4)

$$z = \log_y x = \frac{\log x}{\log y},$$

$$z_x = \frac{1}{x \log y},$$

$$z_y = -\frac{\log x}{y(\log y)^2}.$$

□

□

基本演習 4 (教科書 練習問題 6, 2) 次の各関数の第2次までの偏導関数を求めて下さい。

$$(1) z = (x + y^2)^3 \quad (2) z = x \log(x^2 + y^2)$$

(1)

$$\begin{aligned} z_x &= 3(x + y^2)^2, \\ z_y &= 3(x + y^2)^2(2y) = 6y(x + y^2)^2, \\ z_{xx} &= 6(x + y^2), \\ z_{xy} = z_{yx} &= 6(x + y^2)(2y) = 12y(x + y^2), \\ z_{yy} &= 6(x + y^2)^2 + 12y(x + y^2)(2y) \\ &= 6(x + y^2)\{(x + y^2) + 4y^2\} \\ &= 6(x + y^2)(x + 5y^2). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} z_x &= \log(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}, \\ z_y &= \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \\ z_{xx} &= \frac{2x}{x^2 + y^2} + \frac{4x(x^2 + y^2) - 4x^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{6x(x^2 + y^2) - 4x^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ z_{xy} = z_{yx} &= \frac{2y}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}(2y) = \frac{2y(x^2 + y^2) - 4x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ z_{yy} &= \frac{(2x)(x^2 + y^2) - 2xy(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

□