2　Newton の恒等式と基本対称式

2.1　Newton の恒等式

$f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \in K[t]$ が、$\mathbb{C}$ の部分体 $L \supset K$ で

$$f(t) = a_n(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_n)$$

と分解出来るものとします。また、根のべき和を

$$\lambda_j = \alpha_1^j + \cdots + \alpha_n^j$$

とします。このとき、

$$g(t) = a_n + a_{n-1}t + \cdots + a_1 t^{n-1} + a_0 t^n$$

は、

$$\begin{aligned} g(t) &= t^n\left(a_n\frac{1}{t^n} + a_{n-1}\frac{1}{t^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{1}{t} + a_0\right) \\ &= t^n f\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= t^n a_n\left(\frac{1}{t}-\alpha_1\right)\cdots\left(\frac{1}{t}-\alpha_n\right) \\ &= a_n(1-\alpha_1 t)\cdots(1-\alpha_n t) \end{aligned}$$

である事に注意すれば、

$$\begin{aligned} \log g(t) &= \log a_n + \log(1-\alpha_1 t) + \cdots + \log(1-\alpha_n t) \\ \{\log g(t)\}' &= \frac{-\alpha_1}{1-\alpha_1 t} + \cdots + \frac{-\alpha_n}{1-\alpha_n t} \\ -\frac{g'(t)}{g(t)} &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\left\{1 + \alpha_j t + (\alpha_j t)^2 + \cdots\right\} \\ -g'(t) &= g(t)\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_j + \alpha_j^2 t + \cdots + \alpha_j^{n+1}t^n + \cdots\right) \\ &= g(t)\left(\lambda_1 + \lambda_2 t + \cdots + \lambda_{n+1}t^n + \cdots\right) \end{aligned}$$

となり、等式：

$$\begin{aligned} &-\left(a_{n-1} + 2a_{n-2}t + \cdots + (n-1)a_1 t^{n-2} + na_0 t^{n-1}\right) \\ &\qquad = \left(a_n + a_{n-1}t + \cdots + a_1 t^{n-1} + a_0 t^n\right)\left(\lambda_1 + \lambda_2 t + \cdots + \lambda_{n+1}t^n + \cdots\right) \end{aligned}$$

が得られます。

この両辺の係数を比較して、まず定数項から順に t^{n-1} まで見れば

$$\begin{aligned} -a_{n-1} &= a_n\lambda_1 \\ -2a_{n-2} &= a_n\lambda_2 + a_{n-1}\lambda_1 \\ -3a_{n-3} &= a_n\lambda_3 + a_{n-1}\lambda_2 + a_{n-2}\lambda_1 \\ &\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ -ma_{n-m} &= a_n\lambda_m + a_{n-1}\lambda_{m-1} + \cdots + a_{n-m+1}\lambda_1 = \sum_{j=0}^{m-1} a_{n-j}\lambda_{m-j} \\ &\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ -na_0 &= a_n\lambda_n + a_{n-1}\lambda_{n-1} + \cdots + a_2\lambda_2 + a_1\lambda_1 \end{aligned}$$

がわかり、更に t^n 以上の次数の項の係数比較から

$$\begin{aligned} 0 &= a_n\lambda_{n+1} + a_{n-1}\lambda_{n+2} + \cdots + a_1\lambda_2 + a_0\lambda_1 \\ &\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 0 &= a_n\lambda_{n+k} + a_{n-1}\lambda_{n+k-1} + \cdots + a_1\lambda_{1+k} + a_0\lambda_k = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\lambda_{n+k-j} = \sum_{p=0}^{n} a_p\lambda_{k+p} \\ &\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

が得られます。これらを Newton の恒等式と言います。

2.2　根のべき和と方程式の係数

この Newton の恒等式を順次使って行けば根のべき和 λ_j を方程式の係数 a_m で表す事が出来ます。

まず $-a_{n-1} = a_n\lambda_1$ から $\lambda_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ が分かります。次にこれを使えば

$$\begin{aligned}
-2a_{n-2} &= a_n\lambda_2 - \frac{a_{n-1}^2}{a_n} \\
\lambda_2 &= \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\frac{a_{n-2}}{a_n}
\end{aligned}$$

が得られ、更に

$$\begin{aligned}
-3a_{n-3} &= a_n\lambda_3 + a_{n-1}\left\{\frac{a_{n-1}^2}{a_n^2} - 2\frac{a_{n-2}}{a_n}\right\} - \frac{a_{n-2}a_{n-1}}{a_n} \\
\lambda_3 &= -\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^3 + 3\frac{a_{n-2}a_{n-1}}{a_n^2} - 3\frac{a_{n-3}}{a_n} \\
-4a_{n-4} &= a_n\lambda_4 + a_{n-1}\lambda_3 + a_{n-2}\lambda_2 + a_{n-3}\lambda_1 \\
-4\frac{a_{n-4}}{a_n} &= \lambda_4 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\lambda_3 + \frac{a_{n-2}}{a_n}\lambda_2 + \frac{a_{n-3}}{a_n}\lambda_1 \\
-\lambda_4 &= \frac{a_{n-1}}{a_n}\lambda_3 + \frac{a_{n-2}}{a_n}\lambda_2 + \frac{a_{n-3}}{a_n}\lambda_1 + 4\frac{a_{n-4}}{a_n} \\
&= \frac{a_{n-1}}{a_n}\left\{-\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^3 + 3\frac{a_{n-2}a_{n-1}}{a_n^2} - 3\frac{a_{n-3}}{a_n}\right\} \\
&\qquad + \frac{a_{n-2}}{a_n}\left\{\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\frac{a_{n-2}}{a_n}\right\} + \frac{a_{n-3}}{a_n}\left\{-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\} + 4\frac{a_{n-4}}{a_n} \\
&= -\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^4 + 4\frac{a_{n-2}}{a_n}\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\left(\frac{a_{n-2}}{a_n}\right)^2 - 4\frac{a_{n-3}}{a_n}\frac{a_{n-1}}{a_n} + 4\frac{a_{n-4}}{a_n} \\
\lambda_4 &= \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^4 - 4\frac{a_{n-2}}{a_n}\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 + 2\left(\frac{a_{n-2}}{a_n}\right)^2 + 4\frac{a_{n-3}}{a_n}\frac{a_{n-1}}{a_n} - 4\frac{a_{n-4}}{a_n}
\end{aligned}$$

が得られます。これ以降も同様です。

2.3　基本対称式

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の基本対称式 S_k とは、n 個の $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の中から異なる k 個をとって掛け合わせたもの全ての和とします。従って例えば $n = 3$ なら、

$$\begin{aligned}
S_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\
S_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 \\
S_3 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3
\end{aligned}$$

のことで、これらは $\alpha_1, \dots, \alpha_3$ を根に持つ多項式 $a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ の係数との間に

$$\begin{aligned}
&a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \\
&= a_3(t - \alpha_1)(t - \alpha_2)(t - \alpha_3) \\
&= a_3\left\{t^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)t^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)t - \alpha_1\alpha_2\alpha_3\right\} \\
&= a_3t^3 - a_3S_1t^2 + a_3S_2t - a_3S_3
\end{aligned}$$

から

$$S_1 = -\frac{a_2}{a_3}, \quad S_2 = \frac{a_1}{a_3}, \quad S_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

と云う関係式を持っています。これがいわゆる解と係数の関係です。

2.4　根のべき和と基本対称式

Newton の恒等式を使って方程式の根のべき和が方程式の係数で書ける事を前節学びましたから、従ってそれはまた基本対称式で書ける事も分かります。同様に $n = 3$ のとき計算してみると

$$\lambda_3 = -\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 + 3\frac{a_1 a_2}{a_3^2} - 3\frac{a_0}{a_3}$$

でしたから、これを基本対称式で書けば

$$\lambda_3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3$$

と云う事になりますが、これは

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^3 \\
&= \alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3 \\
&\quad + 3\alpha_1^2\alpha_2 + 3\alpha_1^2\alpha_3 + 3\alpha_2^2\alpha_1 + 3\alpha_2^2\alpha_3 + 3\alpha_3^2\alpha_1 + 3\alpha_3^2\alpha_2 \\
&\qquad + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\
&= \alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3 \\
&\quad + 3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + 3\alpha_1\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + 3\alpha_2\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \\
&\qquad - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\
&= \alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3 + 3(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3
\end{aligned}$$

からも同様に

$$S_1^3 = \lambda_3 + 3S_2S_1 - 3S_3$$

と得る事が出来ます。