11　２項分布　問題演習解答

基本演習 **11.1** 二項分布 $B(3,p)$ に従う確率変数 X の平均値（期待値）・分散を自分の手で計算して下さい。

【解答例】$1-p=q$ とします。まず平均値は、

$$\begin{aligned}
E[X] &= 0\cdot\binom{3}{0}q^3 + 1\cdot\binom{3}{1}pq^2 + 2\cdot\binom{3}{2}p^2q + 3\cdot\binom{3}{3}p^3 \\
&= 3pq^2 + 6p^2q + 3p^3 \\
&= 3pq^2 + 3p^2q + 3p^2q + 3p^3 \\
&= 3pq(q+p) + 3p^2(q+p) \\
&= 3p(q+p) \\
&= 3p
\end{aligned}$$

です。また分散は

$$\begin{aligned}
Var[X] &= 0^2\cdot\binom{3}{0}q^3 + 1^2\cdot\binom{3}{1}pq^2 + 2^2\cdot\binom{3}{2}p^2q + 3^2\cdot\binom{3}{3}p^3 - (3p)^2 \\
&= 3pq^2 + 12p^2q + 9p^3 - 9p^2 \\
&= 3pq^2 + 3p^2q + 9p^2q + 9p^3 - 9p^2 \\
&= 3pq(q+p) + 9p^2(q+p) - 9p^2 \\
&= 3pq
\end{aligned}$$

となります。□

基本演習 **11.2 (**高専教科書　例題 **15.6)** 正常な硬貨を４００回投げて表の出る回数を確率変数 X とするとき、$P[190 \le X \le 210]$ を求めて下さい。

【解答例】X は２項分布 $B(400, 0.5)$ に従いますが、これは正規分布 $N(200, 100)$ で近似する事が出来、

$$\begin{aligned}
P[190 \le X \le 210] &= \sum_{j=190}^{210} P[X=j] \\
&\sim \sum_{j=190}^{210} P[j-0.5 \le N(200,100) \le j+0.5] \\
&= P[189.5 \le N(200,100) \le 210.5] \\
&= P\left[\frac{189.5-200}{10} \le N(0,1) \le \frac{210.5-200}{10}\right] \\
&= P[-1.05 \le N(0,1) \le 1.05] \\
&= 2P[0 \le N(0,1) \le 1.05] \\
&= 2\cdot 0.3531 \\
&= 0.7062
\end{aligned}$$

と近似されます。□

基本演習 **11.3 (**高専教科書　練習問題 **16-7)** 正常なサイコロをくりかえし投げて実際に 1 の目が出る割合とその数学的確率 $\frac{1}{6}$ との差が 0.1 以下になる確率を考えます。その確率が９５％以上であるようにするためには少なくとも何回投げれば良いでしょうか。

【解答例】n 回投げた場合の１の出数は２項分布 $B\left(n, \frac{1}{6}\right)$ に従いますから、n が十分大きいとすれば題意の確率は

$$\begin{aligned}
P\left[\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right| \leq 0.1\right] &= P\left[\left|X-\frac{n}{6}\right| \leq 0.1n\right] \\
&\sim P\left[\left|N\left(\frac{n}{6},\frac{5n}{6^2}\right)-\frac{n}{6}\right| \leq 0.1n\right] \\
&= P\left[|N(0,1)| \leq \frac{0.1n}{\sqrt{\frac{5n}{6^2}}}\right] \\
&= 2P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{0.1n}{\sqrt{\frac{5n}{6^2}}}\right]
\end{aligned}$$

と近似されます。この確率が 0.95 となるのは正規分布表によれば

$$\begin{aligned}
\frac{0.1n}{\sqrt{\frac{5n}{6^2}}} &\sim 1.96 \\
\sqrt{n} &\sim 19.6\frac{\sqrt{5}}{6} \\
n &\sim 19.6^2\frac{5}{36} \\
&\sim 53.3556
\end{aligned}$$

のときである事が分かります。この程度の大きさの n であれば、今やった正規分布による近似は問題なく、また n が大きくなれば確率は大きくなりますから、結局最低でも 54 回投げれば題意を満たす事が分かります。 □

基本演習 **11.4 (**高専教科書　練習問題 **15-5)** 袋の中に赤玉３個と白玉７個が入っています。その中から復元抽出法で１個ずつ玉を繰り返し取り出すとき赤玉の出た回数を X で表すことにします。

（１）１００回取り出すとき $P[X < 27 \quad 又は \quad 33 < X]$ を求めて下さい。

（２）１０００回取り出すとき $P[X < 270 \quad 又は \quad 330 < X]$ を求めて下さい。

【解答例】（１）X は２項分布 $B(100, 0.3)$ に従います。すると

$$\begin{aligned}
P[27 \leq X \leq 33] &= \sum_{j=27}^{33} P[X=j] \\
&\sim \sum_{j=27}^{33} P[j-0.5 \leq N(30, 30\cdot 0.7) \leq j+0.5] \\
&= P[26.5 \leq N(30,21) \leq 33.5] \\
&= P[-3.5 \leq N(0,21) \leq 3.5] \\
&= 2P[0 \leq N(0,21) \leq 3.5] \\
&= 2P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{3.5}{\sqrt{21}}\right] \\
&\sim 2P[0 \leq N(0,1) \leq 0.7638] \\
&\sim 2\cdot 0.2764 \\
&= 0.5528
\end{aligned}$$

ですから、求める確率は $1-0.5528 = 0.4472$ となります。

（2）X は２項分布 $B(1000, 0.3)$ に従います。すると

$$\begin{aligned}
P[270 \le X \le 330] &= \sum_{j=270}^{330} P[X=j] \\
&\sim \sum_{j=270}^{330} P[j-0.5 \le N(300, 300\cdot 0.7) \le j+0.5] \\
&= P[269.5 \le N(300, 210) \le 330.5] \\
&= P[-30.5 \le N(0, 210) \le 30.5] \\
&= 2P[0 \le N(0, 210) \le 30.5] \\
&= 2P\left[0 \le N(0,1) \le \frac{30.5}{\sqrt{210}}\right] \\
&\sim 2P[0 \le N(0,1) \le 2.105] \\
&\sim 2 \cdot 0.4823 \\
&= 0.9646
\end{aligned}$$

ですから、求める確率は $1 - 0.9646 = 0.0354$ となります。 □

発展演習 11.5 階乗を $n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ で近似した場合の様子を調べてまとめ、評価して下さい。

【解答例】そのまま比較すると

n	3	5	10	20	100	1000
$n!$	6	120	3628800	2.433×10^{18}	9.333×10^{157}	4.024×10^{2567}
$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$	1.34	21.06	453999	2.161×10^{17}	3.720×10^{156}	5.076×10^{2565}

なので、なにか定数倍をした方が良いかも。 □