15　仮説検定の問題演習　解答例

基本演習 15.1 (高専教科書　例題 16.4) ある工場では生産しているスチールボールの規格を直径 $12\mathrm{mm}\pm0.5\mathrm{mm}$ としています。いま一つの製品ロットから次の個数を無作為に取り出して直径を測定したところ、どの場合も直径の平均値が $12.04\mathrm{mm}$、分散が $0.12^2\mathrm{mm}$ でした。それぞれの条件のもとでこのロットのスチールボールの直径の平均値は規格の中央値の $12\mathrm{mm}$ であると言えるでしょうか。有意水準５％で検定して下さい。

（１）２０個、全てのスチールボールの直径の分布は正規分布に従い、母標準偏差が $0.1\mathrm{mm}$ であることが分かっている。
（２）８０個、母標準偏差が $0.1\mathrm{mm}$ であることが分かっている。
（３）８０個、母標準偏差は不明。
（４）（１）と同じ条件のもとで、このロットの直径の平均値は $12\mathrm{mm}$ より大きいと言えるかどうか。

帰無仮説 H_0：　『全てのスチールボールの直径の平均値は $12\mathrm{mm}$ である』
対立仮説 H_1：　『全てのスチールボールの直径の平均値は $12\mathrm{mm}$ でない』

（１）帰無仮説 H_0 が正しいと仮定し、母集団 $N(12, 0.1^2)$ から取った大きさ２０の標本平均を $\bar{X}$ とすると $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(12, \frac{0.1^2}{20}\right)$ に従います。
問題は直径の平均値が $12\mathrm{mm}$ であるかどうかですから、有意水準５％の両側棄却域を求めます。$0.05 = P[|\bar{X} - 12| \geq d]$ となる様な $d > 0$ を求めると、標準化して

$$\begin{aligned}
0.05 &= P\left[|N(0,1)| \geq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}}\right] = 2P\left[N(0,1) \geq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}}\right] \\
0.025 &= 0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}}\right] \\
0.475 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}}\right]
\end{aligned}$$

ですから、正規分布表から $\frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}} \sim 1.96$、つまり、$d \sim 0.0438$ が分かります。これは

$$0.05 \sim P[|\bar{X} - 12| \geq 0.0438]$$

を意味し、求める棄却域は $(-\infty, 11.9562] \cup [12.0438, \infty)$ です。今回の具体値 12.04 はこの棄却域に入っておらず、仮説を棄却するだけの根拠はないことになり、直径の平均値は $12\mathrm{mm}$ であると考えて良いことになります。

（２）帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。この場合はサンプル数が大きいので標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(12, \frac{0.1^2}{80}\right)$ で近似されます。
問題は直径の平均値が $12\mathrm{mm}$ であるかどうかですから、両側棄却域を求めます。

$$0.05 = P[|\bar{X} - 12| \geq d]$$

となる様な $d > 0$ を求めると、近似し、さらに標準化して

$$\begin{aligned}
&= P\left[\left|N\left(12, \frac{0.1^2}{80}\right) - 12\right| \geq d\right] \\
&= P\left[|N(0,1)| \geq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{80}}}\right] \\
&= 2P\left[N(0,1) \geq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{80}}}\right] \\
0.025 &= 0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{80}}}\right] \\
0.475 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{80}}}\right]
\end{aligned}$$

によれば正規分布表を参照して $\frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{80}}} \sim 1.96$、つまり、$d \sim 0.022$ が分かります。これは

$$0.05 \sim P[|\bar{X} - 12| \geq 0.022]$$

を意味し、求める棄却域は $(-\infty, 11.978] \cup [12.022, \infty)$ です。今回の具体値 12.04 はこの棄却域に入っていますから、仮説は棄却され直径の平均値は $12\mathrm{mm}$ ではないと判断されます。

（３）帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。この場合サンプル数が大きいので母分散は 0.12^2 で代用し、中心極限定理により標本平均は正規分布で近似します。
つまり標本平均 $\bar{X}$ は $N\left(120, \frac{0.12^2}{80}\right)$ に従いますから、$0.05 = P[|\bar{X} - 12| \geq d]$ とな

る様な $d > 0$ を求めると、

$$0.05 \sim P\left[\left|N\left(12, \frac{0.12^2}{80}\right) - 12\right| \geq d\right]$$
$$= P\left[|N(0,1)| \geq \frac{d}{\frac{0.12}{\sqrt{80}}}\right]$$
$$= 2P\left[N(0,1) \geq \frac{d}{\frac{0.12}{\sqrt{80}}}\right]$$
$$0.025 = 0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{\frac{0.12}{\sqrt{80}}}\right]$$
$$0.475 = P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{\frac{0.12}{\sqrt{80}}}\right]$$

によれば正規分布表を参照して $\frac{d}{\frac{0.12}{\sqrt{80}}} \sim 1.96$、つまり、$d \sim 0.026$ が分かります。これは

$$0.05 \sim P[|\bar{X} - 12| \geq 0.026]$$

を意味し、求める棄却域は $(-\infty, 11.974] \cup [12.026, \infty)$ です。今回の具体値 12.04 はこの棄却域に入っており、仮説は棄却され平均値は 12mm ではないと判断されます。

（4） 帰無仮説 H_0：　『全てのスチールボールの直径の平均値は 12mm である』
対立仮説 H_1：　『全てのスチールボールの直径の平均値は 12mm より大きい』

帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。（1）と同様の事情によってこの母集団からとった大きさ２０の標本平均を $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(12, \frac{0.1^2}{20}\right)$ に従います。

この場合は片側の棄却域で判定すれば良く、$0.05 = P[\bar{X} - 12 \geq d]$ となる様な $d > 0$ を求めると、標準化して

$$0.05 = P\left[N(0,1) \geq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}}\right]$$
$$0.05 = 0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}}\right]$$
$$0.45 = P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}}\right]$$

ですから、正規分布表から $\frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}} \sim 1.645$、つまり、$d \sim 0.037$ が分かります。これは

$$0.05 \sim P[|\bar{X} - 12| \geq 0.037]$$

を意味し、今回の具体値 12.04 はこの棄却域に入っているので仮説は棄却され、直径の平均値は 12mm より大きいと判断されます。

基本演習 15.2 (高専教科書　問題 **16.11)** ある工場で製品の寿命時間は正規分布に従い、その標準偏差は 120 時間であることが分かっています。この会社では『当工場の製品の寿命の平均値は 1800 時間である』と公表しています。この工場の製品 10 個を無作為に抽出して寿命を測定したところ平均値が 1760 時間でした。この会社の公表は正しいと認められるでしょうか、有意水準５％で検定して下さい。

帰無仮説 H_0：　『寿命の平均値は 1800 時間である』
対立仮説 H_1：　『寿命の平均値は 1800 時間でない』

帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。するとこの母集団から取った大きさ１０の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(1800, \frac{120^2}{10}\right)$ に従います。

平均値が 1800 に等しいかどうかが問題になっているので両側検定として棄却域を求めます。

$$0.05 = P[|\bar{X} - 1800| \geq d]$$
$$= P\left[\left|N\left(0, \frac{120^2}{10}\right)\right| \geq d\right]$$
$$= 2P\left[N\left(0, \frac{120^2}{10}\right) \geq d\right]$$
$$0.025 = 0.5 - P\left[0 \leq N\left(0, \frac{120^2}{10}\right) \leq d\right]$$
$$0.475 = P\left[0 \leq N\left(0, \frac{120^2}{10}\right) \leq d\right]$$
$$= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{\sqrt{10}d}{120}\right]$$

ですから、正規分布表から $\frac{\sqrt{10}d}{120} \sim 1.96$、つまり、$d \sim 74.38$ が分かります。これは

$$0.05 \sim P[|\bar{X} - 1800| \geq 74.38]$$

を意味し、求める棄却域は $(-\infty, 1725.62] \cup [1874.38, \infty)$ です。今回の具体値 1760 はこの棄却域に入りません。従って仮説を棄却するだけの根拠はなく、会社の公表は正しいと判断されます。

基本演習 15.3 (高専教科書　練習問題 16-1) ある工場で生産しているスチールパイプから１００個取り出して直径を測定したところ、平均値が $20.1\mathrm{mm}$、分散が $0.23^2\mathrm{mm}$ でした。

（１）直径の母平均 m の信頼度９９％の信頼区間を求めて下さい。

（２）直径の平均値 m は $20.0\mathrm{mm}$ であると工場は言っています。その主張は正しいと言えるでしょうか、有意水準１％で検定して下さい。

（１）スチールパイプ全体の中からとった大きさ１００の標本平均を $\bar{X}$ とします。母平均を m とすれば、$\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{0.23^2}{100}\right)$ に従いますから、

$$0.99 = P[|\bar{X} - m| \le d]$$

となるような d を求めます。実際標準化してゆけば

$$\begin{aligned}
0.99 &= P[|\bar{X} - m| \le d] \\
&= P\left[\left|N\left(0, \frac{0.23^2}{100}\right)\right| \le d\right] \\
&= 2P\left[0 \le N\left(0, \frac{0.23^2}{100}\right) \le d\right] \\
0.495 &= P\left[0 \le N(0,1) \le \frac{d}{0.023}\right]
\end{aligned}$$

がわかり、正規分布表から $\frac{d}{0.023} \sim 2.575$、すなわち、$d \sim 0.059$ が得られます。これは９９％の確率で $|\bar{X} - m| \le 0.059$ となることを意味し、従って今回の具体値 20.1 に対しては、信頼度９９％で $|20.1 - m| \le 0.059$、つまり、

$$20.1 - 0.059 \sim 20.04 \le m \le 20.16 \sim 20.1 + 0.059$$

です．従って求める信頼区間は $[20.04, 20.16]$ です。

（２） 帰無仮説 H_0：　『スチールパイプの直径の平均値 m は $20.0\mathrm{mm}$ である』
対立仮説 H_1：　『スチールパイプの直径の平均値 m は $20.0\mathrm{mm}$ でない』

帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。するとスチールパイプ全体の中からとった大きさ１００の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(20.0, \frac{0.23^2}{100}\right)$ に従います。

問題は直径の平均値が $20.0\mathrm{mm}$ であるかどうかを問題にしていますから有意水準 0.01 で両側検定すれば良く、まずは棄却域を求めます。

$$\begin{aligned}
0.01 &= P[|\bar{X} - 20.0| \ge d] \\
&= P\left[\left|N\left(0, \frac{0.23^2}{100}\right)\right| \ge d\right] \\
&= 2P\left[d \le N\left(0, 0.023^2\right)\right] \\
0.005 &= 0.5 - P[0 \le N(0, 0.023^2) \le d] \\
0.495 &= P\left[0 \le N(0,1) \le \frac{d}{0.023}\right]
\end{aligned}$$

によれば正規分布表を参照して $\frac{d}{0.023} \sim 2.575$、つまり、$d \sim 0.059$ が分かります。これは

$$0.01 \sim P[|\bar{X} - 20.0| \ge 0.059]$$

を意味し、棄却域は $(-\infty, 19.94] \cup [20.06, \infty)$ であり、今回の具体値 20.1 はこの棄却域に入っており、仮説は棄却されます。

以上から主張は正しいとは言えません。

基本演習 15.4 (高専教科書　練習問題 16-4) ある工場で生産している製品は通常重さの平均値が $80\mathrm{g}$、標準偏差が $4\mathrm{g}$ の正規分布をしています。ある日の製品の中から５０個の標本を抽出して測定したところ、重さの平均値が $80.8\mathrm{g}$ でした。その日の製品は平常と比べて重いと言えるでしょうか。標準偏差は変わらないものとして有意水準５％で検定して下さい。

帰無仮説 H_0：　『この日も重さの平均値は $80\mathrm{g}$ であった』
対立仮説 H_1：　『この日は重さの平均値は $80\mathrm{g}$ より重かった』

帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。するとこの日の製品の中から取り出す大きさ５０の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(80, \frac{4^2}{50}\right)$ に従います。
今回問題になっているのは平常より重いかどうかですから片側検定として有意水準５％の棄却域を求めます。つまり、

$$0.05 = P[d \leq \bar{X}]$$

となる $d > 0$ を求めます。標準化すれば

$$\begin{aligned} &= P\left[\frac{d-80}{\frac{4}{5\sqrt{2}}} \leq N(0,1)\right] \\ &= 0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d-80}{\frac{4}{5\sqrt{2}}}\right] \\ 0.45 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d-80}{\frac{4}{5\sqrt{2}}}\right] \end{aligned}$$

ですから正規分布表を参照して $\frac{d-80}{\frac{4}{5\sqrt{2}}} \sim 1.645$、つまり、$d \sim 80.93$ が分かります。これは

$$0.01 \sim P[80.93 \leq \bar{X}]$$

を意味し、棄却域は $[80.93, \infty)$ であり、今回の具体値 80.8 はこの棄却域に入っておらず、仮説を棄却するだけの合理的な根拠はないと判定されます。
従ってこの日も平常よりも重かったとは言えません。

基本演習 15.5 ある工場の資料によると、機械Ａで作られた製品の平均重量は 5.68g です。新しい機械Ｂが導入されて同じ製品が作られていますが、製品の平均重量に変化が生じたように思われたので、Ｂによる製品から１００個無作為に抽出したところ平均重量が 5.71g、標準偏差が 0.23g でした。Ｂを用いて作られた製品の重量は正規分布に従うものとし、また標準偏差はサンプル値の 0.23g であると仮定し、平均重量は変化したと言って良いかどうか、有意水準５％で仮説検定して下さい。

帰無仮説 H_0：　『Ｂで作られた製品の平均重量は $5.68\mathrm{g}$ である』
対立仮説 H_1：　『Ｂで作られた製品の平均重量は $5.68\mathrm{g}$ でない』

帰無仮説 H_0 を仮定します。すると問題に書かれている仮定から、Ｂで作られた製品全体の中から取った大きさ１００の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(5.68, \frac{0.23^2}{100}\right)$ に従います。
問題は平均重量に変化があったかどうかですから両側検定として有意水準５％の棄却域を取ります。

$$0.05 = P[|\bar{X} - 5.68| \geq d]$$

となる様な $d > 0$ を求めれば良いわけですが、標準化して

$$\begin{aligned} &= P\left[\left|N\left(0, \frac{0.23^2}{100}\right)\right| \geq d\right] \\ &= P\left[|N(0,1)| \geq \frac{d}{\frac{0.23}{10}}\right] \\ &= 1 - 2P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{0.023}\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{0.023}\right] \end{aligned}$$

ですから正規分布表を参照して $\frac{d}{0.023} \sim 1.96$、つまり、$d \sim 0.045$ が分かります。これは

$$0.05 = P[|\bar{X} - 5.68| \geq 0.045]$$

を意味し、棄却域は $(-\infty, 5.635] \cup [5.725, \infty)$ となります。今回の具体値 5.71 はこの棄却域に入っていませんので仮説を棄却するに足る理由はないと考えられ、平均重量が変化したとは言えないことが分かります。