13　仮説検定　問題演習解答

基本演習 **13.1 (**教科書　練習問題 **16-6)** あるサイコロを 600 回無作為に投げたところ、1 の目が 118 回出ました。このサイコロは 1 の目が出やすいと言えるでしょうか。有意水準１％で検定して下さい。

【解答例】 帰無仮説 H_0：　『このサイコロは１の出る確率が $\frac{1}{6}$ である』
対立仮説 H_1：　『このサイコロは１の出る確率が $\frac{1}{6}$ より大きい』

帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。この場合６００回投げて 1 の目が出る数は２項分布 $B\left(600, \frac{1}{6}\right)$ に従います。

今回問題となっているのは１の目が出やすいかどうかですから右側片側検定として棄却域を求めますが、２項分布は正規分布で近似して計算します。

$$\begin{aligned}
0.01 &= P\left[B\left(600, \frac{1}{6}\right) \geq d\right] \\
&\sim P\left[d - \frac{1}{2} \leq N\left(100, \frac{500}{6}\right)\right] \\
&\sim P\left[\frac{d - \frac{1}{2} - 100}{\sqrt{\frac{500}{6}}} \leq N(0,1)\right] \\
&= 0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d - \frac{1}{2} - 100}{\sqrt{\frac{500}{6}}}\right] \\
0.49 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d - \frac{1}{2} - 100}{\sqrt{\frac{500}{6}}}\right]
\end{aligned}$$

ですから正規分布表を参照して $\frac{d-\frac{1}{2}-100}{\sqrt{\frac{500}{6}}} \sim 2.325$、つまり、$d \sim 121.72$ が分かります。これは

$$0.01 \sim P\left[B\left(600, \frac{1}{6}\right) \geq 121.72\right]$$

を意味し、求める棄却域は $[121.72, \infty)$ となります。今回の具体値 118 はこの棄却域に入っていません。従って仮説を棄却するに足る理由はないと考えられ、1 の目は出やすいとは言えないことになります。 □

基本演習 **13.2** ある機械が袋に詰める砂糖の重さは、平均 100g、標準偏差 5g の正規分布に従うように調整されます。機械が正しく調整されているかどうか確かめるために、無作為に９個の袋を取って砂糖の重さを測ったところ平均は 102.4g でした。この機械は正しく調整されていると言って良いでしょうか。有意水準５％で検定して下さい。

【解答例】 帰無仮説 H_0：　『重さの平均値は 100 グラムである』
対立仮説 H_1：　『重さの平均値は 100 グラムではない』

まず帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。すると今回の９個のサンプルは $N(100, 5^2)$ に従う母集団から取った大きさ９のサンプルと考えられ、同母集団からの大きさ９の標本平均を $\bar{X}$ とすればこれは $N\left(100, \frac{5^2}{9}\right)$ に従うことが分かります。

問題は機械が正しく調整されているかどうかを問うていますから有意水準５％の両側棄却域を求めれば良く、

$$\begin{aligned}
0.05 &= P[|\bar{X} - 100| \geq d] \\
&= P\left[\left|N\left(0, \frac{5^2}{9}\right)\right| \geq d\right] \\
&= 2P\left[N\left(0, \frac{5^2}{9}\right) \geq d\right] \\
0.025 &= P\left[N(0,1) \geq \frac{d}{\frac{5}{3}}\right] \\
&= 0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{3d}{5}\right] \\
0.475 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{3d}{5}\right]
\end{aligned}$$

から正規分布表を参照して $\frac{3d}{5} \sim 1.96$ すなわち $d \sim 3.27$ が分かります。これは結局

$$P[|\bar{X} - 100| \geq 3.27] \sim 0.05$$

を意味しますから、棄却域は $\bar{X} \leq 96.73, \quad 103.27 \leq \bar{X}$ となります。

今回の測定値 102.4 はここに入らないので、仮説を棄却するだけの合理的な理由はなく、機械は正しく調整されていないとは言えないと判断されます。 □

基本演習 13.3 多数の人口をもつある都市の中学一年生に数学の学力テストを一斉に実施しました。受験生から 100 名を無作為に抽出し得点を調べたところ、得点の平均は 52.2 でした。全受験生の得点は標準偏差 10.5 の正規分布に従うことが分かっているものとします。このとき仮説『全受験生の得点の平均は 50 点である』を、有意水準５％で検定して下さい。また１％でも検定して下さい。

【解答例】 帰無仮説 H_0：　『全受験生の得点の平均は 50 点である』
対立仮説 H_1：　『全受験生の得点の平均は 50 点ではない』

まず仮説 H_0 が正しいと仮定します。すると、全受験生の得点は正規分布 $N(50, 10.5^2)$ に従うことが分かりますから、ここからとった大きさ１００の標本平均を $\bar{X}$ とすれば、$\bar{X}$ は正規分布 $N\left(50, \frac{10.5^2}{100}\right)$ に従うと言えます。

問題は平均が５０点である事が言えるかどうかですから両側検定としてまず有意水準５％の棄却域を計算します。

$$\begin{aligned}
0.05 &= P[|\bar{X} - 50| \geq d] \\
&= P[|N(0, 1.05^2)| \geq d] \\
&= 2P[N(0, 1.05^2) \geq d] \\
0.025 &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1.05^2) \leq d] \\
0.475 &= P[0 \leq N(0, 1.05^2) \leq d] \\
&= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{1.05}\right]
\end{aligned}$$

から正規分布表を参照して $\frac{d}{1.05} \sim 1.96$ すなわち $d \sim 2.06$ が分かります。これは結局

$$P[|\bar{X} - 50| \geq 2.06] \sim 0.05$$

を意味しますから、棄却域は $\bar{X} \leq 47.94, \quad 52.06 \leq \bar{X}$ となります。

今回の調査でのサンプル値である 52.2 はこの棄却域に入っていますから、仮説 H_0 は棄却され、全受験生の平均得点は５０点ではないと判断されます。

次に有意水準１％の棄却域を計算します。

$$\begin{aligned}
0.01 &= P[|\bar{X} - 50| \geq d] \\
&= P[|N(0, 1.05^2)| \geq d] \\
&= 2P[N(0, 1.05^2) \geq d] \\
0.005 &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1.05^2) \leq d] \\
0.495 &= P[0 \leq N(0, 1.05^2) \leq d] \\
&= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{1.05}\right]
\end{aligned}$$

から正規分布表を参照して $\frac{d}{1.05} \sim 2.575$ すなわち $d \sim 2.70$ が分かります。これは結局

$$P[|\bar{X} - 50| \geq 2.70] \sim 0.01$$

を意味しますから、棄却域は $\bar{X} \leq 47.30, \quad 52.70 \leq \bar{X}$ となります。

今回の調査でのサンプル値である 52.2 はこの棄却域に入っていませんから、仮説 H_0 を棄却するに足る理由はないと考えられ、全受験生の平均得点は５０点でないとは言えないと判断されます。 □

基本演習 **13.4** ある工場で生産される糸の強さは平均 $170.8\mathrm{g}$ の重さに耐えるように作られていますが、最近糸が弱くなったと苦情が寄せられています。糸の強さ X は正規分布 $N(m, 5.5^2)$ に従うことが経験的に分かっており、平均 m は $170.8\mathrm{g}$ よりも小さいことが予想されます。今製品から 50 本を無作為抽出して強さを測定したところ、その平均は $169.5\mathrm{g}$ でした。糸は弱くなったと言って良いでしょうか？有意水準 0.05 で検定して下さい。また、同様に有意水準 0.01 でも検定して下さい。

【解答例】 帰無仮説 H_0：　『糸の強さの平均は 170.8 である』
対立仮説 H_1：　『糸の強さの平均は 170.8 より小さい』

まず仮説 H_0 が正しいと仮定します。すると、ここからとった大きさ５０の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(170.8, \frac{5.5^2}{50}\right)$ に従うと言えます。

問題は糸の強さが弱いかどうかですから平均値より小さい側の片側検定としてまず有意水準５％の棄却域を計算します。

$$\begin{aligned}
0.05 &= P[\bar{X} - 170.8 \le -d] \\
&= P\left[N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \le -d\right] \\
0.05 &= 0.5 - P\left[0 \le N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \le d\right] \\
0.45 &= P\left[0 \le N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \le d\right] \\
&= P\left[0 \le N(0,1) \le \frac{5\sqrt{2}d}{5.5}\right]
\end{aligned}$$

から正規分布表を参照して $\frac{5\sqrt{2}d}{5.5} \sim 1.645$ すなわち $d \sim 1.28$ が分かります。これは結局

$$P[\bar{X} - 170.8 \le -1.28] \sim 0.05$$

を意味しますから、棄却域は $\bar{X} \le 169.52$ となります。

今回の調査でのサンプル値である 169.5 はこの棄却域に入っていますから、仮説 H_0 は棄却され、糸は弱くなったと判断されます。

次に有意水準１％の棄却域を計算します。

$$\begin{aligned}
0.01 &= P[\bar{X} - 170.8 \le -d] \\
&= P\left[N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \le -d\right] \\
0.01 &= 0.5 - P\left[0 \le N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \le d\right] \\
0.49 &= P\left[0 \le N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \le d\right] \\
&= P\left[0 \le N(0,1) \le \frac{5\sqrt{2}d}{5.5}\right]
\end{aligned}$$

から正規分布表を参照して $\frac{5\sqrt{2}d}{5.5} \sim 2.325$ すなわち $d \sim 1.81$ が分かります。これは結局

$$P[\bar{X} - 170.8 \le -1.81] \sim 0.01$$

を意味しますから、棄却域は $\bar{X} \le 169$ となります。

今回の調査でのサンプル値である 169.5 はこの棄却域に入りませんから、仮説 H_0 を棄却するに足る理由はないと考えられ、糸は弱くなったとは言えないと判断されます。 □

ただし近似値の取り方によっては棄却域に入るかどうかの判定が上の逆になる場合もあります。

基本演習 **13.5** ある工場の資料によると、機械Ａを用いて作られた製品の平均重量は $5.68\mathrm{g}$ です。新しい機械Ｂが導入されて同じ製品が作られていますが、製品の平均重量に変化が生じたように思われたので、Ｂによる製品から 70 個無作為に抽出したところ平均重量が $5.73\mathrm{g}$、標準偏差が $0.23\mathrm{g}$ でした。Ｂを用いて作られた製品の重量は正規分布に従うものとし、また、標本数が大きいのでその標準偏差は $0.23\mathrm{g}$ であると仮定し、平均重量は変化したと言って良いかどうか、有意水準５％で仮説検定して下さい。

【解答例】 帰無仮説 H_0： 『Ｂで作られた製品の平均重量は $5.68\mathrm{g}$ である』
対立仮説 H_1： 『Ｂで作られた製品の平均重量は $5.68\mathrm{g}$ ではない』

仮説 H_0 を仮定します。すると問題に書かれている仮定から、Ｂで作られた製品全体の中から取った大きさ７０の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(5.68, \frac{0.23^2}{70}\right)$ に従います。

問題は平均重量に変化があったかどうかですから両側検定として有意水準５％の棄却域を取ります。

$$0.05 = P[|\bar{X} - 5.68| \geq d]$$

となる様な $d > 0$ を求めれば良いわけですが、標準化して

$$\begin{aligned}
&= P\left[\left|N\left(0, \frac{0.23^2}{70}\right)\right| \geq d\right] \\
&= P\left[|N(0,1)| \geq \frac{d}{\frac{0.23}{\sqrt{70}}}\right] \\
&= 1 - 2P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{\frac{0.23}{\sqrt{70}}}\right] \\
0.475 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{\frac{0.23}{\sqrt{70}}}\right]
\end{aligned}$$

ですから正規分布表を参照して $\frac{d}{\frac{0.23}{\sqrt{70}}} \sim 1.96$、つまり、$d \sim 0.054$ が分かります。これは

$$0.05 = P[|\bar{X} - 5.68| \geq 0.054]$$

を意味し、今回の具体値 5.73 はこの棄却域に入っていません。従って仮説を棄却するに足る理由はないと考えられ、平均重量が変化したとは言えないことが分かります。 □

基本演習 **13.6** ある工場で作られる電球の寿命は標準偏差 100 時間の正規分布に従っています。計画では寿命の平均値は 1800 時間になるように製造されている筈ですがこの平均値に関して疑義が生じています。

そこでこの工場で製造された多数の電球の中から 25 個を抽出して寿命時間を測定したところ、その平均値は 1835 時間でした。以下の３通りで検定して下さい

（１）寿命時間の平均値は 1800 時間より長いと言えるか有意水準 5 ％で検定して下さい。

（２）寿命時間の平均値は 1800 時間と言えるか有意水準 5 ％で検定して下さい。

（３）寿命時間の平均値は 1800 時間と言えるか有意水準 10 ％で検定して下さい。

【解答例】仮説 H_0 :『電球の寿命時間の平均値は１８００時間である』が正しいと仮定します。

すると調査に使った２５個のサンプルは、正規分布 $N(1800, 100^2)$ に従う母集団からの大きさ２５の標本と考えられ、大きさ２５の標本平均を $\bar{X}$ と書く事にすれば $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(1800, \frac{100^2}{25}\right)$ に従うことが分かります。

（１）この場合は平均値が 1800 時間より長いかどうかを問題にしているので、

対立仮説 H_1 :『電球の寿命時間の平均値は１８００時間より長い』

と考え、右片側検定としてまず棄却域を求めます。

$$0.05 = P[\bar{X} - 1800 \geq d]$$

となる $d > 0$ を求めると、

$$\begin{aligned}
&= P\left[N\left(0, \frac{100^2}{25}\right) \geq d\right] \\
&= P\left[N(0,1) \geq \frac{d}{20}\right] \\
&= 0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{20}\right] \\
0.45 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{20}\right]
\end{aligned}$$

ですから正規分布表を参照して $\frac{d}{20} \sim 1.645$、つまり、$d \sim 32.9$ が分かります。これは

$$0.05 \sim P[\bar{X} - 1800 \geq 32.9]$$

を意味し、今回の具体値 1835 はこの棄却域に入っています。従って仮説は棄却され、寿命は 1800 時間より長いと言えます。

（２）この場合は平均値が 1800 時間であるかどうかを問題にしているので

対立仮説 H_2 :『電球の寿命時間の平均値は１８００時間ではない』

を考え、両側検定としてまず棄却域を求めます。

$$0.05 = P[|\bar{X} - 1800| \geq d]$$

となる $d > 0$ を求めると、

$$\begin{aligned}
&= P\left[\left|N\left(0, \frac{100^2}{25}\right)\right| \geq d\right] \\
&= P\left[|N(0,1)| \geq \frac{d}{20}\right] \\
&= 2P\left[N(0,1) \geq \frac{d}{20}\right] \\
&= 2\left(0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{20}\right]\right) \\
0.475 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{20}\right]
\end{aligned}$$

ですから正規分布表を参照して $\frac{d}{20} \sim 1.96$、つまり、$d \sim 39.2$ が分かります。これは

$$0.05 \sim P[|\bar{X} - 1800| \geq 39.2]$$

を意味し、今回の具体値 1835 はこの棄却域に入っておらず、仮説を棄却するだけの合理的な根拠はないと判定されます。

従って平均値は 1800 時間でないとは言えないと判断されます。

（３）この場合も平均値が 1800 時間であるかどうかを問題にしているので

対立仮説 H_2 :『電球の寿命時間の平均値は１８００時間ではない』

を考え、両側検定としてまず棄却域を求めます。

$$0.10 = P[|\bar{X} - 1800| \geq d]$$

となる $d > 0$ を求めると、

$$\begin{aligned}
&= P\left[\left|N\left(0, \frac{100^2}{25}\right)\right| \geq d\right] \\
&= P\left[|N(0,1)| \geq \frac{d}{20}\right] \\
&= 2P\left[N(0,1) \geq \frac{d}{20}\right] \\
&= 2\left(0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{20}\right]\right) \\
0.45 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{20}\right]
\end{aligned}$$

ですから正規分布表を参照して $\frac{d}{20} \sim 1.645$、つまり、$d \sim 32.9$ が分かります。これは

$$0.10 \sim P[|\bar{X} - 1800| \geq 32.9]$$

を意味し、今回の具体値 1835 はこの棄却域に入っていますから帰無仮説は棄却され、平均値は 1800 時間ではないと言えます。

□