

2つの自然数が互いに素である確率はどれくらいか

なるほど、そう云えばどうなのでしょうね。普段何気なく『互いに素である』なんて言ってますが、どの程度の頻度で起こる事なのか考えても見ませんでした。

でも、そんな確率たって、どうやって計算すればよいのやら分からないよ!?

まあまあ、堅い事は言わないで、ちょっと考えてみて下さい。確率はどの程度だとあなたは思いますか？

あなたの予想：

そこに何かイメージはありますか？：

1 確率論的な計算

始めに問題をきちんと確認しておきましょう。

全ての自然数 (0 は含めません) の入った抽選箱があるとして、そこからまず1つ自然数を取り出して、それをメモしてから元の箱に戻します。次に、もう一回、さっきと同じ様に自然数を取り出してまたメモします。そうして得られた2つの自然数が互いに素である確率は幾らでしょうか

と云う問題を考える事にします。

まず1回目のくじ引きを考えると、例えば出た数が3で割れる確率はごく自然に考えて3分の1です。3の倍数は3個に1個あるわけですからこう考えるのが自然でしょう。一般の素数 p に対しても同様で、出た数が素数 p で割れる確率は $\frac{1}{p}$ となるはずで

自然数を全部入れるとか言っている辺りでもう既に『きちんと』していないんですが、まあ、気にしないで下さい。普通なら有限で切って極限を考えるんでしょうけれども、それで良いのかと言ったらそうでもないから。

確かに p の倍数が出る確率が $\frac{1}{p}$ だと言うのは自然だけど、細かいことを言えばこれだってちょっとマズい。任意の素数 p に対して p の倍数が出る確率が $\frac{1}{p}$ と

るような『確率』は(素朴には)存在しないからです。詳しくは M.Kac を参照して頂くとして、要するに完全加法性がないわけです。ややこしい事をすれば一応存在すると言えるか!?! でもまあ、ここではそんな事は、いいよ。

次に2回目のくじ引きですが、最初に出た数字が例えば3だったからと言って、それが2回目のくじ引きに影響を与える事はありません。1回目の数字と2回目の数字と、これら2つの自然数が何であるかと言う事は互いに無関係です。全く独立に行われる行為だと言う事です。

と云う事は、例えば1回目に出た数が p で割り切れて、かつ、2回目に出た数も p で割り切れる確率は、それぞれの確率の積となって $\frac{1}{p^2}$ です。

この事から、『2つとも p で割り切れる』と云う事象の否定は『少なくともどちらか一方が p で割り切れない』であり、その確率は $1 - \frac{1}{p^2}$ となる事も分かります：

2つの自然数のうち少なくともどちらか一方は p で割り切れない確率は $1 - \frac{1}{p^2}$ である

そこでいよいよ問題の『互いに素である確率』ですが、まずはこの命題の否定を考えてみましょう。

『互いに素でない』場合とはどういう事だったかと言うと、それは1でない共通の約数をもつ場合でしたね。その公約数自体は素数とは限りませんが、公約数が素因数分解されますので、結局互いに素でない場合は共通の約数となる素数がある事になります。

『互いに素でない』 = 『両方とも p で割り切れる様な素数 p がある』

この様に考えて行くと、

『互いに素である』

= 『どんな素数 p に対しても、少なくともどちらか一方は p で割り切れない』

と書き直せる事が分かって来ます。この解釈に従って確率を計算してみましょう。

わかり易くするために全ての素数に小さい方から番号を付けて行きましょう。素数は無限個ありますからね。その数列を p_1, p_2, p_3, \dots とします。2, 3, 5, 7, ... となってますね、実際は。そうすると、

『互いに素である』

= 『任意の n に対して、少なくともどちらか一方は p_n で割り切れない』

= 『少なくともどちらか一方は p_1 で割り切れない』

かつ 『少なくともどちらか一方は p_2 で割り切れない』

かつ 『少なくともどちらか一方は p_3 で割り切れない』

⋮

と書けます。

また、ここで次の事に注意します。

p と q が互いに異なる素数である時、ある自然数 n が p で割り切れるかどうかと云う事と、 q で割り切れるかどうかと云う事柄には全く関係がないと云う事です。

そりゃそうですね？ n が 3 で割り切れたからと言って 11 で割り切れやすいわけでもないし、割り切れにくいわけでもありません。

⌊ p と q が互いに素でない (従ってどちらかは素数ではない) 場合にはそうとも限りません。8 で割り切れるならば明らかに 2 で割り切れるからです。

つまり、分かった事は、さっき問題となる『互いに素である』と云う事柄を分解した時の 1 つ 1 つの命題『少なくともどちらか一方は P_n で割り切れない』は全て互いに全く無関係だったわけです (確率論的には『独立』と言います)。

互いに無関係 (=独立) である様な事象が『かつ』で結ばれているとき、その全体の確率は 1 つ 1 つの事象の確率の積になりますから、結局、互いに素である確率は無限積の記号を使って

$$\begin{aligned} (\text{互いに素である確率}) &= \prod_{n=1}^{\infty} (\text{少なくともどちらか一方が } p_n \text{ で割り切れない確率}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^2}\right) \end{aligned}$$

となります。この無限積の部分は結局全ての素数に関する積ですから、これは

$$\text{勝手に選んだ 2 つの自然数が互いに素である確率は } \prod_{p:\text{素数}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \text{ である。}$$

とも書く事が出来るでしょう。

2 無限積と無限和の驚くべき関係

さて、これで一応は確率が求まったわけですが、かと云って、計算式が求まっただけでどれぐらいの値なのかはこれだけでは何とも言えませんね～

無限積なのは分かったけど、無限積ってどうやって計算するんでしょうね？何とかしてこの無限積を計算する方法はないでしょうか。

そこでちょっとこの無限積の逆数を考えてみましょう：

$$\frac{1}{\prod_{p:\text{素数}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} = \prod_{p:\text{素数}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \prod_{p:\text{素数}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}}\right)$$

となりますね。そこで 1 つ 1 つの因子を見てみると、これは等比級数の和の式から

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} = 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} + \dots$$

となっているはずですが。従って全ての素数に対する無限積は

$$\begin{aligned} &\prod_{p:\text{素数}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}}\right) \\ &= \prod_{p:\text{素数}} \left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} + \dots\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) \\ &\quad \left(1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{11^4} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{13^4} + \dots\right) \dots \end{aligned}$$

となる事が分かります。

はいはい、具体的な数字で書き表されて来ましたね。それではこいつを展開してみましょう。

括弧でくくられているものが無限個ありますので、展開式にはそれぞれの括弧の中から1項ずつ選んで掛けたものが出てくるはずですよ。

しかし、1より小さい数を無限個掛けてしまうと何となく0になってしまいそうですね。だから、無限個の括弧の中から1つずつ選ぶ時に、幾つか有限個の括弧の中からは1でないものを選んで構いませんが、あとの大部分の括弧（無限個あります）の中からは1を選ばざるを得ません。まあ、1なら無限個掛けても1ですからね。

それでは展開式に現れる項の中で大きなもの（即ち分母の小さいもの）から順に調べて行きましょう。

まずは全て1を選んだ場合の1がありますね。次は1つ目の括弧の中で $\frac{1}{2^2}$ を選び、その他の括弧では全部1を選んで得られる $\frac{1}{2^2}$ があります。

次に大きなものは何でしょうか？そうですね、2番目の括弧から $\frac{1}{3^2}$ を選び、その他は1を選んで得られる $\frac{1}{3^2}$ です。

どんどん行きますよ！次はですね、 $\frac{1}{5^2}$ ではありませんよ、1番目の括弧の中に $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{4^2}$ がありますからこれです。その次に大きいのが $\frac{1}{3^2}$ です。

お次は何でしょうね～今までの結果を見てみると

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}$$

と来ましたから、もし $\frac{1}{6^2}$ があるのならそれが次です。ありますかねえ、どうでしょう。

1番目の括弧から $\frac{1}{2^2}$ を選び、2番目の括弧から $\frac{1}{3^2}$ を選び、その他の括弧からは1を選んで掛けると確かに $\frac{1}{6^2}$ になりますね！ありました。

実は、全く同様に探して行くとどんな自然数 n についても $\frac{1}{n^2}$ が出てくるんです。しかも重要なのは、決して2回は出て来ないと云うことです。

例えば $\frac{1}{24^2}$ を考えてみましょう。分母を素因数分解すると

$$\frac{1}{24^2} = \frac{1}{(2^3 \cdot 3)^2} = \frac{1}{2^6} \cdot \frac{1}{3^2}$$

ですから、1番目の括弧から $\frac{1}{2^6}$ を取り、2番目の括弧から $\frac{1}{3^2}$ を選んでくるしかありませんね、これを実現するには。

と云うわけで、無限積

$$\prod_{p:\text{素数}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} \right) \\ = (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots)(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots)(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \dots) \\ (1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} + \dots)(1 + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{11^4} + \dots)(1 + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{13^4} + \dots) \dots$$

を展開すると、何と

$$= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

となってしまうんです！

いやあ、結構驚きです。無限積イコール無限和ですよ！

$$\prod_{p:\text{素数}} \left(\frac{1}{1 - p^{-2}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

この左辺は勝手に選んだ2つの自然数が互いに素である確率の逆数でしたから、

$$(2\text{つの自然数が互いに素である確率}) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$$

であると云うことが分かります。

どうですか、無限積よりこの級数の方が計算し易そうじゃないですか？

じゃあこの級数の和を計算してみましょう！

3 $\sin \pi y$ の Taylor 展開

ここで話はがらっと変わって、Taylor 展開です。基本的な関数の展開例として

$$\sin y = y + \frac{1}{3!}y^3 - \frac{1}{5!}y^5 - \dots$$

がありましたね。 $y = 0$ のまわりでの Taylor 展開ですが、両辺の y の所に πy を代入してみると、

$$\sin \pi y = \pi y - \frac{1}{3!}\pi^3 y^3 + \frac{1}{5!}\pi^5 y^5 - \dots$$

となりますよね。この右辺を無限次の多項式だと考えてみます。

どうですか、多項式と言われると因数分解してみたくありませんか（ならないって）。いやいや本気ですよ。で、因数分解するためには何を知れば良いかと云うと、それは即ち（右辺） $= 0$ とした時の解ですよ。解が全て分かれば因数分解出来そうです。

ではこの $\sin \pi y$ と云う関数はどんな y で 0 になるでしょうか。

実はこれは非常に簡単な事です。そうですね、 y が整数ならば $\sin \pi y$ は 0 です。それ以外にはありません。従って（右辺） $= 0$ の解は全ての整数です。と云う事は、この右辺の無限次多項式は K は定数として

$$\sin \pi y = \pi y - \frac{1}{3!}\pi^3 y^3 + \frac{1}{5!}\pi^5 y^5 - \dots = Ky(1+y)(1-y)(2+y)(2-y)\dots$$

と因数分解されるはずですが（もちろんこの式もマズいですが、まあ、気分的には良いでしょう。正しくは $(1 - \frac{y}{2})$ などとします）。そうすると、この中辺と右辺に注目して y で割ってやれば

$$\pi - \frac{1}{3!}\pi^3 y^2 + \frac{1}{5!}\pi^5 y^4 - \dots = K(1^2 - y^2)(2^2 - y^2)(3^2 - y^2)\dots$$

ですから、ここで $y^2 = x$ と書けば、

$$\pi - \frac{1}{3!}\pi^3 x + \frac{1}{5!}\pi^5 x^2 - \dots = K(1^2 - x)(2^2 - x)(3^2 - x)\dots$$

である事が分かりました。

で、ですね、結果的に得られたこの x の無限次多項式について考えれば、この多項式は $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ で 0 になる事が分かります。言い換えれば、

$$\text{無限次方程式： } \pi - \frac{1}{3!}\pi^3 x + \frac{1}{5!}\pi^5 x^2 - \dots = 0 \text{ の解は } 1^2, 2^2, 3^2, \dots \text{ である}$$

と言うわけなんです。

4 解と係数の関係

“解と係数の関係” と聞いて、『ああ、あれか...』と思いつける節のある人も多いと思います。恐らく、皆さんは 2 次方程式の解と係数の関係：

2 次方程式 $c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$ ($c_2 \neq 0$) の解が γ_1, γ_2 である時、

$$\gamma_1 + \gamma_2 = -\frac{c_1}{c_2}, \quad \gamma_1 \gamma_2 = \frac{c_0}{c_2}$$

となる。

$c_2 \neq 0$ とあるのは、もしそれが 0 なら、これは“2 次”方程式ではなくなってしまふからです。

を思い浮かべるのではないのでしょうか？ 3 次方程式でも同じような式が成り立ちましたね。

でも、今回お話しする“解と係数の関係”はこれではありません。あまり学ぶ機会がないようなので、ちょっと見慣れないものかも知れませんがそれは、“解の逆数の和”に関するものです。以下、1 次方程式から順に高次まで見て行きましょう。

共通の記法として、 x^m の係数は c_m で、 n 次方程式の解は、重複や複素数も込めて n 個ありますが、それらを $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ で表します。また、各方程式は 0 を解として持たないものとします。

4.1 1 次方程式の場合

1 次方程式：

$$c_1 x + c_0 = 0 \quad (c_1 \neq 0)$$

は、簡単に解けて、解は $x = -\frac{c_0}{c_1}$ ですね。ここで、解が 0 でないと仮定すれば（つまり、 $c_0 \neq 0$ と仮定すれば）、解を γ_1 と書いた時、

$$\frac{1}{\gamma_1} = -\frac{c_1}{c_0}$$

が成り立っています。

4.2 2次方程式の場合

2次方程式：

$$c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0 \quad (c_2 \neq 0)$$

の解を γ_1, γ_2 とした時、さっき書いた解と係数の関係によれば、

$$\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1\gamma_2} = \frac{-\frac{c_1}{c_2}}{\frac{c_0}{c_2}} = -\frac{c_1}{c_0}$$

が成り立ちます。

おや？これは1次方程式の時と同じですね～

4.3 3次方程式の場合

3次方程式：

$$c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0 \quad (c_3 \neq 0)$$

の3つの解を $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ とすると、これは

$$c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = c_3(x - \gamma_1)(x - \gamma_2)(x - \gamma_3)$$

と因数分解される筈です。

これを展開すれば、3次方程式の解と係数の関係：

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = -\frac{c_2}{c_3}, \quad \gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2 = \frac{c_1}{c_3}, \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\frac{c_0}{c_3}$$

が得られます。

従って、解の逆数の和は、

$$\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3} = \frac{\gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3} = -\frac{c_1}{c_0}$$

となつて、やはり1次、2次の時と全く同じ記号で表現されます。

4.4 n次方程式の場合

以上のトライアルから、n次方程式の解の逆数の和は、矢張り $-\frac{(1\text{次項の係数 } c_1)}{(定数項 } c_0)}$ となるだろうと予想されます。

実際計算してみればそうなる事は簡単に示す事が出来ます。

n次方程式：

$$c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0 = 0 \quad (c_n \neq 0)$$

の解 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ の逆数の和は、

$$\frac{1}{\gamma_1} + \dots + \frac{1}{\gamma_n} = \frac{\gamma_2 \dots \gamma_n + \gamma_1 \gamma_3 \dots \gamma_n + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_4 \dots \gamma_n + \dots + \gamma_1 \dots \gamma_{n-1}}{\gamma_1 \dots \gamma_n}$$

となるわけですが、方程式が

$$c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0 = c_n(x - \gamma_1) \dots (x - \gamma_n)$$

と因数分解される事を使えば、この右辺を展開して1次の項と定数項だけに着目する事によって、

$$\gamma_2 \dots \gamma_n + \gamma_1 \gamma_3 \dots \gamma_n + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_4 \dots \gamma_n + \dots + \gamma_1 \dots \gamma_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{c_1}{c_n}$$

$$\gamma_1 \dots \gamma_n = (-1)^n \frac{c_0}{c_n}$$

である事がわかります。

従って、解の逆数の和は、やはり $-\frac{c_1}{c_0}$ である事がわかりました：

n 次方程式の解の逆数の和は、 $-\frac{(1\text{次項の係数})}{(定数項)}$ である

この結果の大事なところは、得られた値が、1次の項と定数項にしか依らないと云う事です。2次以上の項の係数は、解の逆数の和には影響を与えません。

今まで見て来た様にちょっと計算すると当たり前の事なのですが、初めて聞くと意外な感じがしないでもありません。

もっとも、こんな回りくどいやり方でやらなくても（今日は意図的にそうしましたが）、n次方程式：

$$c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0 = 0 \quad (c_n \neq 0)$$

の解を $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ とすると（全て0ではないと仮定しますが）、上の方程式で x を $\frac{1}{x}$ で置き換えて得られるn次方程式：

$$c_n + c_{n-1}x + \dots + c_1x^{n-1} + c_0x^n = 0 \quad (c_n \neq 0)$$

の解は $\frac{1}{\gamma_1}, \dots, \frac{1}{\gamma_n}$ であり、これらの和は当然 $n-1$ 次の係数と n 次の係数の比（の-1倍）で得られるわけですが、 $n-1$ 次の係数が c_1 、 n 次の係数が c_0 ですから上の式がすぐに出てきます。

5 結論：Leonhard Euler の計算、 あるいは無限次方程式の解と係数の関係

ここでは、今考えた“解と係数の関係”を使って級数の和： $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ の値を計算してみようと思います。大ざっぱな方針は、

この級数を、何らかの方程式の“解の逆数の和”と思い、その方程式の定数項と1次の項の係数を計算し、結果的に級数の和を求めてしまおう

と云うものです。

さて、この級数を解の逆数の和と見るわけですから、当然、“解”そのものは $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ ですね、無限個あります。

うーむ、解が無限個あるって事は、無限次方程式ですね！そう、さっき計算した無限次方程式がありましたよね？

$$\pi - \frac{1}{3!}\pi^3x + \frac{1}{5!}\pi^5x^2 + \dots = 0$$

です。こいつの解は確かに $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ でしたね。

そこでですね、さっき考えた n 次方程式の解と係数の関係が、無限次の方程式でも成り立つものと勝手に解釈してしまえば、

$$(\text{解の逆数の和}) = -\frac{(\text{1次の係数})}{(\text{定数項})}$$

でしたから

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = -\frac{-\frac{1}{3!}\pi^3}{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

となってしまうんです。求まっちゃいましたよ。

え？そんな勝手に無限次に拡張しても良いのかって？

うん、まあ、細かいことを言えば確かにそうです。そもそも無限次方程式の因数分解自体怪しいです。今やって来た計算は何となく正しそうではありますが、数学的にはまるで正しくない議論を含みまくっています。有り体に言えば“ウソ”です。

でも、例えば実際に無限和 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ を数値計算してみるわけですよ。有限項までの和を計算してみて下さい。そして恐らくそれが等しくなるであろう $\frac{\pi^2}{6}$ も近似計算してみて下さい。 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ としてある程度の計算を以下に示しておきます：

$$S_{10} = 1.54976773116654$$

$$S_{100} = 1.63498390018489$$

$$S_{1000} = 1.64393456668156$$

$$S_{10000} = 1.64483407184807$$

$$S_{100000} = 1.64492406689824$$

$$S_{1000000} = 1.64493306684877$$

$$(\text{参考}) \quad \frac{\pi^2}{6} = 1.64493406684823$$

どうですか？ちょっと収束が遅いのでアレですが、何となく等しそうですね？と云う事は、さっき“ウソ”と言いましたが、あながちウソでもなさそうですね。

この一連の計算を始めてやったのは、やはり、かの L.Euler でした (1735年)。彼は $\frac{\pi^2}{6}$ 程度の数なら少数の並びを見るだけでそれが $\frac{\pi^2}{6}$ に等しいのかどうか分かったと言います (ホントか?)。まあ、それぐらいの経験を積んでいたと云う事は確かです。

ですから整数の自乗の逆数の和が $\frac{\pi^2}{6}$ である事はとっくに分かっていた。ただ証明する事が出来なかっただけでした。しかしたまたま (?) $\sin \pi x$ の Taylor 展開を計算していて、はっと気付いたのでしょう。

『この方法で証明する事が出来るかも知れない』と。

で、やってみたのがこの一連の計算でした。

もちろん、Euler は偉大な数学者でしたから、それで満足する事はありませんでした。数学的に正しい証明がなされていない以上、幾ら『正しそうだ』と思っても疑うべきだと。そして彼は、最終的に、この一連の怪しげな計算が『数学的に正しい』事を証明してみせたのでした (以上、かなりの脚色あり)。

以上により、

$$\text{勝手に選んだ2つの自然数が互いに素である確率は } \frac{6}{\pi^2}$$

である事が分かりました。

近似値を計算すると、0.6079271018540267... ですか。6割がた互いに素なわけですね。どうですか？最初に予想した値と比べて大きいですか、小さいですか？

素数と Taylor 展開に関する演習問題

問題 1. 級数の和:

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

を今日やった計算と似た様な方法で計算出来ないでしょうか?

$$(1^4 - x^4)(2^4 - x^4) \dots = (1^2 - x^2)(1^2 + x^2)(2^2 - x^2)(2^2 + x^2) \dots$$

である事と、今日出て来た

$$K(1^2 - x^2)(2^2 - x^2) \dots = \pi - \frac{1}{3!}\pi^3 x^2 + \frac{1}{5!}\pi^5 x^4 - \dots$$

およびこの式において $x \rightarrow ix$ と置き換えて得られる

$$K(1^2 + x^2)(2^2 + x^2) \dots = \pi + \frac{1}{3!}\pi^3 x^2 + \frac{1}{5!}\pi^5 x^4 + \dots$$

を利用して考えてみて下さい。

問題 2. $\log(1+x)$ の Taylor 展開:

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + \dots$$

を使って級数の和:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

の値を求めて (予想して?) 下さい。

問題 3. (1) $\text{Tan}^{-1}x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ である事と等比級数の和の公式:

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

を利用して $\text{Tan}^{-1}x$ の $x=0$ での Taylor 展開を求めて下さい。

(2) 上の結果を使って

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

の値を求めて (予想して?) 下さい。

問題 4. 1 から N までの間に素数がだいたい幾つあるか次の要領で計算してみましょう。素数を小さい方から並べた数列を $\{p_k\}$ とし、1 から 2^{n-1} までの間の素数の個数を k_n としましょう。(1) 全ての自然数の中から勝手に選んだ 1 つの自然数が、 k_n 個の素数 p_1, p_2, \dots, p_{k_n} のいずれによっても割り切れない確率は $\prod_{k=1}^{k_n} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ となる事を示して下さい。(2) 従って、1 から 2^n までの自然数の中の素数の個数はだいたい $2^n \prod_{k=1}^{k_n} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ ($= Q$ とします) 個になる事を示して下さい。

(3) 等比級数の和の式:

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots \quad (|r| < 1)$$

を使って

$$\frac{2^n}{Q} = \prod_{k=1}^{k_n} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

となる事を示して下さい。

(4) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$ となる事を示して下さい。(5) 以上から $Q < \frac{2^{n+1}}{n+2}$ を示し、1 から N までの間にある素数の個数 Q_N は、だいたい

$$Q_N < \frac{2N}{2 + \log_2 N}$$

と評価される事を示して下さい。

(6) また、この計算結果から、全ての自然数の中から勝手に 1 つ自然数を選んだときそれが素数である確率は 0 である事を示して下さい。

問題 5. 素数が無限個ある事を証明して下さい (今日の内容や他の問題とは関係ありません)。