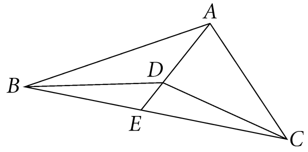
１． $\triangle ABC$ の内部に点 D があって、

$$3\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$$

が成り立っているとします。

　このとき直線 AD と辺 BC の交点 E は辺 BC をどんな比で内分するでしょうか。$BE:EC$ を答えて下さい。



配点：１０点	シラバス達成度目標：ア、イ

解答例　$\overrightarrow{DE}$ は $\overrightarrow{AD}$ の（正の）定数倍であるから、$\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{AD}$ と置きます。与式によれば

$$3\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{AD}=\frac{2\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}}{3}$$

$$\overrightarrow{DE}=k\frac{2\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}}{3}$$

となりますが、辺 BC を $1:2$ に内分する点を F とした場合、最後の項 $\dfrac{2\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}}{3}$ は明らかに $\overrightarrow{DF}$ です。

　E,F 共に辺 BC 上にあってヴェクター $\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}$ が平行ですからこれは $E=F$ を意味します。

　従って点 E は辺 BC を $1:2$ に内分し、$BE:EC=1:2$ となります。

A　BE:EC=BD:DCなどの辺の比を言っているだけのもの　３点
B　ヴェクターの式変形を少しやっているだけのもの　３点
C　DA=nEAなど、１つ定数を導入してやっているもの　４点
D　２つ定数を導入してはいるが、ミスがあったもの　７点

G　面積比を使ってやっているがミスのあったもの（不十分なもの）　５点

E　説明が不足しているもの　－１点
F　計算ミス　－３点

２． ヴェクター$\mathbb{v}$と$\mathbb{w}$は共に単位ヴェクターであって、挟む角が 60° であるとき、２つのヴェクター$\mathbb{v}+\mathbb{w}$と$\mathbb{v}-2\mathbb{w}$の挟む角を求めて下さい。

配点：１０点	シラバス達成度目標：ア、イ

解答例

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{v}+\mathbb{w}|^2 &= (\mathbb{v}+\mathbb{w})\cdot(\mathbb{v}+\mathbb{w}) \\
&= \mathbb{v}\cdot\mathbb{v} + 2\mathbb{v}\cdot\mathbb{w} + \mathbb{w}\cdot\mathbb{w} \\
&= |\mathbb{v}|^2 + 2|\mathbb{v}||\mathbb{w}|\frac{1}{2} + |\mathbb{w}|^2 \\
&= 3 \\
|\mathbb{v}+\mathbb{w}| &= \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

A 内積の計算は出来ている ３点
B 図でやろうとしてミスがあったり途中のもの ５点
C Ａと同じ

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{v}-2\mathbb{w}|^2 &= (\mathbb{v}-2\mathbb{w})\cdot(\mathbb{v}-2\mathbb{w}) \\
&= \mathbb{v}\cdot\mathbb{v} - 4\mathbb{v}\cdot\mathbb{w} + 4\mathbb{w}\cdot\mathbb{w} \\
&= |\mathbb{v}|^2 - 4|\mathbb{v}||\mathbb{w}|\frac{1}{2} + 4|\mathbb{w}|^2 \\
&= 3 \\
|\mathbb{v}-2\mathbb{w}| &= \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

なので求める角を θ とすると

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3}^2\cos\theta &= (\mathbb{v}+\mathbb{w})\cdot(\mathbb{v}-2\mathbb{w}) \\
&= \mathbb{v}\cdot\mathbb{v} - \mathbb{v}\cdot\mathbb{w} - 2\mathbb{w}\cdot\mathbb{w} \\
&= |\mathbb{v}|^2 - |\mathbb{v}||\mathbb{w}|\frac{1}{2} - 2|\mathbb{w}|^2 \\
&= -\frac{3}{2} \\
\cos\theta &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

D 方向性は良いがミスがあったり、途中のもの ７点

となって θ は 120° です。

３． a, b, c, d は 0 でない定数とします。

（１）直線 $ax + by + c = 0$ と円周 $x^2 + y^2 = d^2$ が接するための条件は $(a^2 + b^2)d^2 = c^2$ となる事を証明して下さい。

（２）直線 $4x - 3y + 7 = 0$ と原点との距離を求めて下さい。

配点：（１）１０点、（２）５点	シラバス達成度目標：イ

解答例　（１）連立方程式：

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 = d^2 \end{cases}$$

がただ一組の解をもつ条件を求めれば良いが、第 2 式を変形した $b^2x^2 + b^2y^2 = b^2d^2$ に第１式から得られる $by = -ax - c$ を代入すれば

$$b^2x^2 + (ax + c)^2 = b^2d^2$$

A　ここまで出来ていれば　５点

$$(a^2 + b^2)x^2 + 2acx + c^2 - b^2d^2 = 0$$

なる 2 次方程式が得られる。この 2 次方程式の解１つに対して元の連立方程式の解１組が得られるので、元の連立方程式の解がただ一組であるためにはこの 2 次方程式が重解なら良い。

従って判別式に依る判定により

$$(ac)^2 - (a^2 + b^2)(c^2 - b^2d^2) = 0$$

D　ここまで出来ていれば　７点

$$a^2b^2d^2 - b^2c^2 + b^4d^2 = 0$$

$$(a^2 + b^2)d^2 = c^2$$

B　法線ヴェクターに言及していれば　２点
C　少しの計算のみのもの　３点
E　説明不足のもの　－１点

を得る（$b \neq 0$ に注意)。

（２）求める距離を d と置けば上の結果から

$$d^2 = \frac{7^2}{16 + 9} = \left(\frac{7}{5}\right)^2$$

となって $d = \frac{7}{5}$ である。

A　（１）の結果を使わずに計算してミスしたもの　２点
D　（１）の結果を使って計算したがミスがあったもの　－２点

B　直線と半径の交点を求めようと連立方程式までは立てたもの　２点
C　計算の不十分さ　－１点
E　距離が±になっているもの　－１点

４．次の行列式が 0 になる x の値を求めて下さい。

（１）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & x^3 & x^4 \end{vmatrix}$　　（２）$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ -4 & 4 & 1-x \end{vmatrix}$

配点：各１５点	シラバス達成度目標：エ

解答例　（１）

$$\begin{array}{c|c} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & x^3 & x^4 \end{vmatrix} & \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & x^2-1 \\ 0 & x^3-x & x^4-x^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2)-(1) \\ (3)-(2) \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 \\ x(x^2-1) & x^2(x^2-1) \end{vmatrix}$$

$$= (x^2-1)(x-1)\begin{vmatrix} 1 & x+1 \\ x & x^2 \end{vmatrix}$$

$$= -x(x-1)^2(x+1)$$

となるので行列式が 0 となるのは $x = 0, \pm 1$ のいずれかの時である。

（２）

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ -4 & 4 & 1-x \end{vmatrix} \\ (1)\quad(2)\quad(3) \end{array} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1-x & -x & 1 \\ 1-x & 4 & 1-x \end{vmatrix} \\ (1)+(2)+(3)\quad(2)\quad(3) \end{array}$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 4 & 1-x \end{vmatrix} \begin{matrix} (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -x-1 & 1 \\ 0 & 3 & 1-x \end{vmatrix} \begin{matrix} (4) \\ (5)-(4) \\ (6)-(4) \end{matrix}$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} -x-1 & 1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)(x^2-4)$$

$$= (1-x)(x-2)(x+2)$$

となるので行列式が 0 となるのは $x = 1, \pm 2$ のいずれかの時である。

（１）、（２）共通

A　サラスの方法で行列式は求めているが因数分解等出来ていないもの　８点
B　計算ミス少し　－４点
C　重大な計算ミスがあったもの、または計算ミスが多かったもの　－８点
E　行列式が０になるxを求める際、両辺をxやx-1などで割ってしまっている　－１０点
G　解のうち幾つかは代入などにより自明としたが、幾つか忘れているもの　１０点

（１）、（２）共通

D　因数分解などはしたが結論を書き忘れているもの　－１点
F　議論が雑なもの　－２点

５． 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めて下さい。

配点：１５点	シラバス達成度目標：ウ、オ

解答例

1	2	3	1	0	0	(1)
2	3	4	0	1	0	(2)
5	6	5	0	0	1	(3)
1	2	3	1	0	0	(1)
2	3	4	0	1	0	(2)
1	0	-3	0	-2	1	(3)-2(2)=(4)
1	2	3	1	0	0	(1)
0	-1	-2	-2	1	0	(2)-2(1)=(5)
0	-2	-6	-1	-2	1	(4)-(1)=(6)
1	0	-1	-3	2	0	(1)+2(5)=(7)
0	-1	-2	-2	1	0	(5)
0	0	-2	3	-4	1	(6)-2(5)=(8)
2	0	-2	-6	4	0	2(7)=(9)
0	1	2	2	-1	0	-(5)=(10)
0	0	-2	3	-4	1	(8)
2	0	0	-9	8	-1	(9)-(8)=(11)
0	1	0	5	-5	1	(10)+(8)=(12)
0	0	-2	3	-4	1	(8)
2	0	0	-9	8	-1	(11)
0	2	0	10	-10	2	2(12)
0	0	2	-3	4	-1	-(8)

従って逆行列は以下の通り：

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -9 & 8 & -1 \\ 10 & -10 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

掃き出し法に依る計算の場合

B　ミスが少ないもの　－５点
E　ミスが多いもの　－１０点

外積法：

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

外積法・余因子法に依る計算の場合

A　計算ミス　－４点
C　外積、余因子それぞれの計算は良いが、まとめる際にミスをしているもの　－３点
D　ミスの多いもの　－１０点

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$$

従って逆行列は以下の通り：

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -9 & 8 & -1 \\ 10 & -10 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

６．次の行列式を計算して下さい。

（１）$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$

（２）$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

配点：各１０点	シラバス達成度目標：エ

解答例　（１）

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{vmatrix} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} = \dfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ 2(3) = (4) \end{array} \\ = \dfrac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \begin{array}{c} (1)-(4) \\ (2) \\ (4) \end{array} \\ = \dfrac{1}{6} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \\ = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{8}\right) \\ = -\dfrac{1}{432} \end{array}$$

（２）

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 40 + 280 - 42 - 0 - 20 = 258$$

（１）、（２）共通

A　計算ミス　－５点
B　1/216-1/144のままにしているもの　－２点