1． 直線 $y = ax + b$ が行列 $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ の表す一次変換で自分自身に移る（つまり不動直線である）とき、a, b の値を求めて下さい。

配点：５点	シラバス達成度目標：ア、イ、カ

解答例　直線上の点 $(x, ax+b)$ の移り先を (X, Y) とおけば、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ax+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (8a-1)x + 8b \\ (7a-2)x + 7b \end{pmatrix}$$

であるから、この点が再び直線 $y = ax + b$ 上にあるための条件は $Y = aX + b$ が成り立つ事である。これは

$$\begin{aligned} Y &= aX + b \\ (7a-2)x + 7b &= a\{(8a-1)x + 8b\} + b \\ 0 &= (8a^2 - 8a + 2)x + 8ab - 6b \end{aligned}$$

ですから、直線が不動であるための条件はこの式が全ての x に対して成り立つ事になります。

従って連立方程式：

$$\begin{cases} 4a^2 - 4a + 1 = (2a-1)^2 = 0 \\ 2b(4a-3) = 0 \end{cases}$$

が得られますが、第１式から $a = \frac{1}{2}$ が分かり、従って第２式から $b = 0$ が得られます。

A　方針自体に問題がある　２点
B　(x, ax+b) の像を求めて色々やっているが答えが出なかったもの　３点
C　固有ヴェクターを使ってやっているが答えが出なかったもの　３点
D　少しのミスのみのもの　４点

2． ２次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $A^3 = O$ を満たしているとします。

（１）$|A| = 0$ である事を証明して下さい。

（２）ケーリー・ハミルトンの等式：

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$$

を使って実は既に $A^2 = O$ である事を証明して下さい。

配点：（１）１０点,（２）５点	シラバス達成度目標：ウ、エ

解答例　（１）$|A|^3 = |A^3| = 0$ より題意が得られます。

A　少し計算だけしてあるもの　３点
B　議論の仕方に問題がある　－４点
C　かなりの所まで計算したが答えが出ていないもの　６点
D　単に $A^3 = O$ なら $A^2 = A = O$ としているもの　１点
E　計算ミス　－３点

（２）ケーリー・ハミルトンの等式の両辺に A を掛けると、

$$A^3 - (a+d)A^2 + (ad - bc)A = O$$

となりますが、（１）の結果から $ad - bc = 0$ であり、また仮定から $A^3 = O$ なので $(a+d)A^2 = O$ が得られます。

ここで $A^2 \neq O$ であると仮定すると $a + d = 0$ でなければなりませんが、この場合ケーリー・ハミルトンの等式から $A^2 = O$ となって矛盾します。

従って $A^2 = O$ です。

A　何かしら試している　１点
B　A^2 - (a+d)A = 0 （に類するもの）は分かっている　３点
C　少しのミス　－１点

３．行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ の逆行列を掃き出し法で求めて下さい。

配点：２０点	シラバス達成度目標：オ

解答例

1	2	3	1	0	0	(1)
3	4	5	0	1	0	(2)
5	7	8	0	0	1	(3)
1	2	3	1	0	0	(1)
0	-2	-4	-3	1	0	(2)-3(1)=(4)
0	-3	-7	-5	0	1	(3)-5(1)=(5)
1	2	3	1	0	0	(1)
0	-2	-4	-3	1	0	(4)
0	6	14	10	0	-2	-2(5)=(6)
1	0	-1	-2	1	0	(1)+(4)=(7)
0	-2	-4	-3	1	0	(4)
0	0	2	1	3	-2	(6)+3(4)=(8)
2	0	-2	-4	2	0	2(7)=(9)
0	-2	-4	-3	1	0	(4)
0	0	2	1	3	-2	(8)
2	0	0	-3	5	-2	(9)+(8)
0	-2	0	-1	7	-4	(4)+2(8)=(10)
0	0	2	1	3	-2	(8)
2	0	0	-3	5	-2	(9)+(8)
0	2	0	1	-7	4	-(10)
0	0	2	1	3	-2	(8)

以上により、求める逆行列は以下の通り：

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 1 & -7 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

A　やってはいけない変形がある　－７点
B　計算ミス　－５点
C　少しだけやっている　３点
D　ちょっとしたミス　－３点
E　ある程度やってあるが途中まで　１０点
F　そもそも掃き出し法のやり方がおかしい　５点

４．次の行列式を計算して下さい（特に因数分解する必要はありません）。

（１）$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$　（２）$\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix}$

配点：（１）１５点,（２）１０点	シラバス達成度目標：エ

解答例　（１）

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 21 & -5 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \\ 14 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1)+3(2) \\ (2) \\ (3)+2(2) \end{matrix}$$

$$= (-1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 21 & -5 \\ 14 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=49$$

A　計算ミス１個　－３点
B　計算ミス　２個　－５点
C　±のミスだけ　－２点

A　上手く計算してはいるが、最後まで行かなかったもの　７点
B　ちょっとした計算ミスのみのもの　７点
C　やってはいけない変形があるもの　５点
D　まとめていないもの　－１点

（２）

$$\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2b & 2a & 0 \\ b-c & c+a & b-a \\ 0 & 2c & 2b \end{vmatrix} \begin{matrix} (1)+(2) \\ (2) \\ (3)+(2) \end{matrix}$$

$$= 4b^2(c+a) - 4bc(b-a) - 4ab(b-c)$$

$$= 8abc$$

５． 連立方程式：

$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y=3 \\ -kx+z=2 \end{cases}$$

は異なる解を少なくとも２組もつ事が分かっています。このとき k の値を求めて下さい。

配点：５点	シラバス達成度目標：ア、ウ、エ

解答例 もし係数行列が正則なら解はただ一組しか存在しない。従って題意より係数行列は正則ではない。

$$0=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=2-k-1$$

から $k=1$ である。

A 色々試しているが答えが出なかったもの ３点
B 係数行列の正則性に近づいた議論があるもの ４点
C 少しのミス −１点

６． 次の漸化式：

$$\begin{cases} a_{n+1}=5a_n-b_n \\ b_{n+1}=6a_n-2b_n \end{cases}, \quad a_0=1,\, b_0=2$$

を満たす数列 $\{a_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$, $\{b_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ を以下の通りに求めて下さい。

（１）係数行列 $C=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ヴェクターを求めて下さい。

（２）係数行列 C を対角化し、その n 乗 C^n を求めて下さい。

（３）漸化式の解 $\{a_n\},\{b_n\}$ を求めて下さい。

配点：（１）２０点、（２）と（３）で１０点	シラバス達成度目標：キ、ク

解答例 （１）固有方程式は

$$0=\begin{vmatrix} 5-x & -1 \\ 6 & -2-x \end{vmatrix}=(x+2)(x-5)+6=x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$$

となるため、固有値は $-1,4$ である。

対応した固有ヴェクターはそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ になります。

A 固有ヴェクターの記法に問題あり −２点
B 一方の固有ヴェクターが間違っているもの １５点

（2）$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ と置けば、

$$\begin{aligned} CP &= \left(C\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(-\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \left(-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ P^{-1}CP &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となって対角化される。
従って、

$$\begin{aligned} \left\{P^{-1}CP\right\}^n &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \\ P^{-1}C^nP &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \\ C^n &= P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} (-1)^n & 4^n \\ 6(-1)^n & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} (-1)^n - 6\cdot 4^n & -(-1)^n + 4^n \\ 6(-1)^n - 6\cdot 4^n & -6(-1)^n + 4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る。

A　対角化のみで来ているもの　６点
K　対角化の詳しい計算がないもの　－２点
I　対角化の計算ミスがあったもの　３点
D　対角化のミスで、
**　Pとその逆行列の位置が入れ替わってしまっているもの　４点**
E　Pの逆行列のミス　４点

B　n乗まで出来ているもの　８点
C　n乗が出来ていて、更に一般項について少し計算しているもの　９点
G　n乗を間違えたケースで一般項は他の方法で正しく求めている　８点
J　Gで一般項を間違えたもの　７点
L　n乗を間違えたケースで、Pと逆行列の位置のミス　６点
M　n乗を間違えたケースで、計算ミスのもの　６点

（3）

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= C^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} (-1)^n - 6\cdot 4^n & -(-1)^n + 4^n \\ 6(-1)^n - 6\cdot 4^n & -6(-1)^n + 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -(-1)^n - 4\cdot 4^n \\ -6(-1)^n - 4\cdot 4^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} (-1)^n + 4\cdot 4^n \\ 6(-1)^n + 4\cdot 4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が求める一般項です。

F　間違えたあともそれなりに計算している　＋１点
H　少し計算したのみ　２点