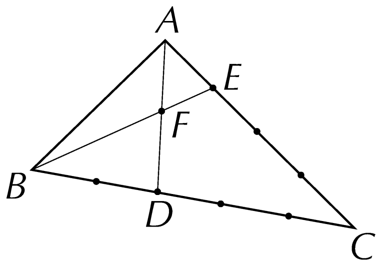
１． $\triangle ABC$ において次の問いに答えて下さい：

（１）辺 BC を２：３に内分する点を D とした時、ヴェクター $\overrightarrow{AD}$ をヴェクター $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ で表して下さい。

（２）辺 CA を３：１に内分する点を E とし、線分 BE と線分 AD の交点を F とします。この時点 F の位置ヴェクター $\overrightarrow{OF}$ を３頂点の位置ヴェクター $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ で表して下さい。

（３）直線 CF と辺 AB の交点を G とした時、$AG : GB$ の長さの比は幾らになりますか。



配点：（１）１５点、（２）１０点、（３）５点	シラバス達成度目標：ア、イ

解答例 （１）

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}
$$

A 計算ミス ー３点

B そもそも指示通りの表し方になっていない ５点

（２）ヴェクター $\overrightarrow{AF}$ はヴェクター $\overrightarrow{AD}$ の定数倍ですから、仮に $\overrightarrow{AF} = m\overrightarrow{AD}$ とおけば、（１）の結果から

$$
\overrightarrow{AF} = \frac{3m}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2m}{5}\overrightarrow{AC} \quad \cdots (*)
$$

である事が分かります。また、ヴェクター $\overrightarrow{BF}$ はヴェクター $\overrightarrow{BE}$ のやはり定数倍ですので、$\overrightarrow{BF} = n\overrightarrow{BE}$ とおいて此れを変形すれば

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BF} &= n\overrightarrow{BE} \\
\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} &= n\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}\right) \\
\overrightarrow{AF} &= (1-n)\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AE} \\
&= (1-n)\overrightarrow{AB} + \frac{n}{4}\overrightarrow{AC} \quad \cdots (**)
\end{aligned}
$$

です。

間違えた主たる理由によって採点：
A ２本の式から答えに至る間でストップ、又は重大なミス ６点
B ２本の式を使うと云う手法自体が出来ていない ３点
C 計算ミス ８点

他にもミスがあれば
D 計算ミスなど軽いものー１
E 考え方のミス ー２

従って、（＊）と（＊＊）式によれば

$$
\begin{aligned}
\frac{3m}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2m}{5}\overrightarrow{AC} &= (1-n)\overrightarrow{AB} + \frac{n}{4}\overrightarrow{AC} \\
\left(\frac{3m}{5} + n - 1\right)\overrightarrow{AB} &= \left(-\frac{2m}{5} + \frac{n}{4}\right)\overrightarrow{AC}
\end{aligned}
$$

となるのですが、$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は平行ではなく、両辺の係数は 0 である事、即ち連立方程式：

$$
\begin{cases}
\frac{3}{5}m + n = 1 \\
-\frac{2}{5}m + \frac{1}{4}n = 0
\end{cases}
$$

が得られます。

第２式の４倍を第１式から引けば

$$\frac{11}{5}m = 1 \quad \text{すなわち、} \quad m = \frac{5}{11}$$

となってこれを（＊）に戻してやれば

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AF} &= \frac{3}{11}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{11}\overrightarrow{AC} \\
\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF} &= \frac{3}{11}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) + \frac{2}{11}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}\right) \\
\overrightarrow{OF} &= \frac{6}{11}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{11}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{11}\overrightarrow{OC}
\end{aligned}$$

である事が分かります。

A　きちんとした方針が立っていないもの　１点

B　面積比やその他の何らかの方針が立てられているが最後まで出来なかった、あるいは間違ったもの　２点

C　（２）までのミスが原因のミスのみのもの　３点

（３）上の結果から

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OF} \\
&= \left(\frac{6}{11} + \frac{3}{11} + \frac{2}{11}\right)\overrightarrow{CO} + \frac{6}{11}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{11}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{11}\overrightarrow{OC} \\
&= \frac{6}{11}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{11}\overrightarrow{CB} \\
&= \frac{9}{11}\left(\frac{6}{9}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{9}\overrightarrow{CB}\right)
\end{aligned}$$

となりますが、右辺の括弧内は線分 AB を $1:2$ に内分する点を H とした時の $\overrightarrow{CH}$ に他ならず、$\overrightarrow{CF}$ がその定数倍と云うことは３点 C, F, H は同一直線上にあることが分かります。従ってこの点 H こそが点 G に他ならず、求める比は $AG : GB = 1 : 2$ です。

２． 直線 $x + y + c = 0$ と円周 $(x - v)^2 + (y - w)^2 = d^2$ が接するための条件は

$$2d^2 = (c + v + w)^2$$

となる事を証明して下さい（$d > 0$）。

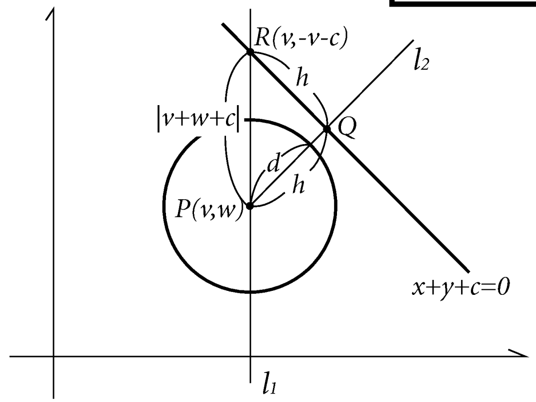
配点：１０点	シラバス達成度目標：イ

この類いの解法で

F　説明が不十分なもの　６点

I　計算ミス　５点

解答例その１　幾何学的な解法



図の様に、円の中心 $P(v, w)$ を通り y-軸に平行な直線 l_1 と、題意の直線 $x + y + c = 0$ に垂直な直線 l_2 を考えて、直線 $x + y + c = 0$ との交点をそれぞれ R, Q とします。このとき点 R の座標は $R(v, -v - c)$ ですから、PR 間の距離は $|v + w + c|$ です。また、三角形 PQR は直角２等辺三角形であって、PQ 間の距離を h とすれば３平方の定理から

$$(v + w + c)^2 = 2h^2$$

が成り立ちます。

従って、問題の円周と直線が接するための条件は $h = d$ である事に他なりませんからその条件式は題意の通りになる事が分かります。

解答例その２　方程式論による解法　題意の円周と直線が接するための条件は連立方程式：

$$\begin{cases} x+y+c=0 \\ (x-v)^2+(y-w)^2=d^2 \end{cases}$$

がただ１つの解をもつ事ですが、直線の方程式から $y=-x-c$ なのでこれを円周の方程式に代入して得られる２次方程式：

$$(x-v)^2+(-x-c-w)^2=d^2, \quad \text{すなわち} \quad 2x^2+2(c+w-v)x+v^2+(c+w)^2-d^2=0$$

が重解となる条件を求めれば良い事になります。実際それは判別式が 0 と云う事ですから

$$\begin{aligned} 4(c+w-v)^2-8\{v^2+(c+w)^2-d^2\}&=0 \\ -4c^2-4w^2-4v^2-8cw-8vw-8cv+8d^2&=0 \\ 2d^2&=(v+w+c)^2 \end{aligned}$$

となって題意は証明されました。

この類いの解法で

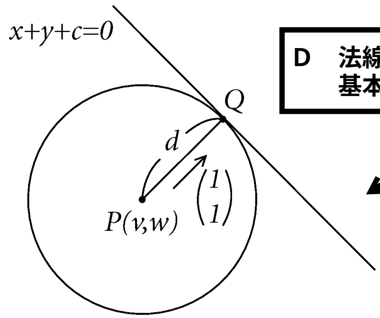
A　連立方程式とその後の少しの計算まで出来たもの　４点

B　判別式の計算程度まで出来たもの　６点

C　最後まで行ったもの　１０点
ただし、計算ミスは
G　少し　ー２点
H　多い　ー４点

E　ある程度までは計算しているが
答えに到達しなかった、あるいは
重大なミスがあったもの　３点

解答例その３ ヴェクターを使った解法　点 $P(v,w)$ から直線 $x+y+c=0$ に下ろした垂線の足を Q としたとき、線分 PQ の長さ（すなわち点 P と直線との距離）が d となる条件を求めれば良い事が分かります。



D　法線の方程式が違っていたり、
基本が出来ていないもの　１点

すると、図から分かる様に、ヴェクター $\overrightarrow{PQ}$ は直線に直交しますからこの直線の法線ヴェクター $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ に平行であって長さが d です。

従って

$$\overrightarrow{PQ}=\pm\frac{d}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

のどちらかですから、

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}v\\w\end{pmatrix}\pm\frac{d}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

によれば、点 Q が直線上にある事から

$$\begin{aligned} \left(v\pm\frac{d}{\sqrt{2}}\right)+\left(w\pm\frac{d}{\sqrt{2}}\right)+c&=0 \\ v+w+c\pm\sqrt{2}d&=0 \\ \pm\sqrt{2}d&=v+w+c \end{aligned}$$

です。従って $\pm$ のところが $+$ の場合も $-$ の場合もどちらであっても

$$2d^2=(v+w+c)^2$$

が得られます。

３．　次の計算を実行して下さい。

（１） $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$　　（２） ${}^t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

（３） $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

配点：各１０点	シラバス達成度目標：ウ

解答例　（１）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

（２）

$${}^t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -3 + 6 - 8 = -5$$

（３）

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 11 & 29 \\ -5 & 2 & 6 \\ 7 & 21 & 59 \end{pmatrix}$$

A　計算ミス少し　６点

B　計算ミス多い　４点

C　ケアレスミス　８点

（１）～（３）共通

４．　行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を、掃き出し法で求めて下さい。

配点：１５点	シラバス達成度目標：ウ、オ

A　ある程度やってはいるが、掃き出し法自体が出来ていない　５点

B　やり方は良いが計算ミス　１０点

C　書き写し間違いなどケアレスミス　１２点

解答例

1	3	2	1	0	0	(1)
0	-2	1	0	1	0	(2)
2	1	4	0	0	1	(3)
1	3	2	1	0	0	(1)
0	-2	1	0	1	0	(2)
0	-5	0	-2	0	1	(3)-2(1)=(4)
2	6	4	2	0	0	2(1)=(5)
0	-2	1	0	1	0	(2)
0	-10	0	-4	0	2	2(4)=(6)
2	0	7	2	3	0	(5)+3(2)=(7)
0	-2	1	0	1	0	(2)
0	0	-5	-4	-5	2	(6)-5(2)=(8)
10	0	35	10	15	0	5(7)=(9)
0	-10	5	0	5	0	5(2)=(10)
0	0	-5	-4	-5	2	(8)
10	0	0	-18	-20	14	(9)+7(8)=(11)
0	-10	0	-4	0	2	5(2)=(10)+(8)=(12)
0	0	-5	-4	-5	2	(8)
5	0	0	-9	-10	7	$\frac{1}{2}$(11)
0	5	0	2	0	-1	-$\frac{1}{2}$(12)
0	0	5	4	5	-2	-(8)

従って逆行列は

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -9 & -10 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

です。

５． 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ の逆行列を、外積を使って求めて下さい。

配点：１５点	シラバス達成度目標：イ、ウ

解答例

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ 19 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -23 \end{pmatrix}$$

B 外積（あるいは余因子）の計算方法を理解していない ３点

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -29 \\ 19 \\ -11 \end{pmatrix} = -90$$

以上から、求める逆行列は

$$\frac{1}{90} \begin{pmatrix} 29 & -19 & 11 \\ -13 & -7 & 23 \\ 4 & 16 & -14 \end{pmatrix}$$

です。

A 転置のし忘れ １２点

C 行列式の掛け忘れなど １２点

D 計算ミス １０点

E 書き写しミスなど １２点