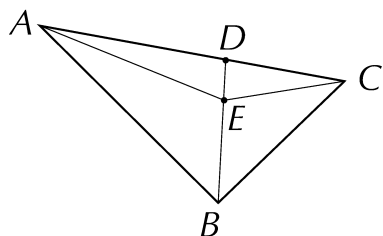


1. 図の様に $\triangle ABC$ の内部に点 E があり、面積比が $\triangle ABE : \triangle BCE = 3 : 2$ であるとき、直線 BE と辺 CA の交点 D の位置ベクトル $\vec{OD}$ を $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ で表して下さい。



配点：15 点 シラバス達成度目標：ア、イ

解答例 $\triangle ABE$ と $\triangle BCE$ の面積比は、 BE を共通の底辺と考えれば高さの比に一致し、またその高さの比を使って考えれば $\triangle ABD$ と $\triangle BCD$ の面積比も（ BD を共通の底辺として）同じ $3 : 2$ である事が分かります。

しかし、この同じ2つの3角形を、今度は AD と DC をそれぞれの底辺として考えると、今度は高さが同じですから底辺の長さの比が $AD : DC = 3 : 2$ である事が分かります。

B 多少の計算のみのもの 3 点

C 高さの比を使った議論までは出来ているもの 5 点

すると、

$$\begin{aligned}\vec{OD} &= \vec{OA} + \vec{AD} \\ &= \vec{OA} + \frac{3}{5}\vec{AC} \\ &= \vec{OA} + \frac{3}{5}(\vec{AO} + \vec{OC}) \\ &= \frac{2}{5}\vec{OA} + \frac{3}{5}\vec{OC}\end{aligned}$$

D 計算ミス - 5 点

E ベクトルの計算に関する深刻なミス - 8 点

となる事が分かります。

A 指示どおりのもので表せていない、途中までのもの 10 点

2. 3 点 $F(0, 1, -2), G(3, 2, 1), H(-5, 13, 2)$ を通る平面の法線ベクトルを求めて下さい。

配点：5 点 シラバス達成度目標：イ、ウ

解答例

$$\vec{FG} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{FH} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

なので、

$$\vec{FG} \times \vec{FH} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ -27 \\ 41 \end{pmatrix}$$

が得られ、このベクトルは2つのベクトル $\vec{FG}, \vec{FH}$ の双方に直交しますのでこれが求める平面の法線ベクトルになっています。

- A 連立方程式を立てて計算して途中のもの 2 点
- B 2 点間のベクトルに言及出来ているもの 3 点
- C そのまま位置ベクトルの外積をしているもの 3 点

3. 次の行列式を計算して下さい。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix}$$

配点：各 15 点 シラバス達成度目標：エ

解答例 (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = 0$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

(1)、(2) 共通

- A ベクトル 3 重積でやろうとして途中のもの 5 点
- B 計算ミス -5 点
- C 整理していないもの -2 点
- D 軽い書き間違い等のミス -3 点
- E 深刻なミス -10 点

4. 行列 $\begin{pmatrix} p & 2 \\ 3 & 1-p \end{pmatrix}$ の表す一次変換によって直線 $y = px$ が自分自身に移るときの p の値を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：カ

解答例 直線上の任意の点 (x, px) の移動先は

$$\begin{pmatrix} p & 2 \\ 3 & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ px \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3px \\ 3x + p(1-p)x \end{pmatrix} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{A この辺りの計算まで} \\ \text{出来ているもの} \end{array} \quad 4 \text{ 点}$$

から $(3px, 3x + p(1-p)x)$ ですので、これが再びもとの直線上にある条件は、

$$3x + p(1-p)x = p(3px)$$

が成り立つ事であり、これが任意の x に対して成り立つためには

$$\begin{aligned} 3 + p(1-p) &= 3p^2 \\ 0 &= 4p^2 - p - 3 \\ &= (4p+3)(p-1) \end{aligned}$$

A ある程度計算はしているが、掃き出し法自体が理解出来ないもの 5 点

すなわち $p = 1, -\frac{3}{4}$ のどちらかである事が分かります。また、いずれの場合も題意の直線の像は原点につぶれる事なく確かに直線になっています。

以上から求める p の値は $p = 1, -\frac{3}{4}$ です。

- B 固有値を求めてやっているが上手く行っていないもの 5 点
C 的のはずれた計算しか出来ないもの 3 点
D 計算ミス - 4 点

5. 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を、掃き出し法で求めて下さい。

配点：15 点 シラバス達成度目標：オ

解答例

2	0	1	1	0	0	(1)
-4	1	3	0	1	0	(2)
3	0	2	0	0	1	(3)
2	0	1	1	0	0	(1)
-4	1	3	0	1	0	(2)
6	0	4	0	0	2	(3) × 2 = (4)
2	0	1	1	0	0	(1)
0	1	5	2	1	0	(2) + 2(1) = (5)
0	0	1	-3	0	2	(4) - 3(1) = (6)
2	0	0	4	0	-2	(1) - (6) = (7)
0	1	0	17	1	-10	(5) - 5(6) = (8)
0	0	1	-3	0	2	(6)
1	0	0	2	0	-1	(7) × $\frac{1}{2}$
0	1	0	17	1	-10	(8)
0	0	1	-3	0	2	(6)

以上により、求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 17 & 1 & -10 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

です。

- B 計算ミス - 5 点
C 書き間違いなどの軽いミス - 3 点
D 計算ミスが多いもの 7 点

6. 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めて下さい。

配点：20 点 シラバス達成度目標：キ

解答例 まず固有方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - xE \right| \\ &= \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 3 \\ 4 & -3-x & -2 \\ -1 & 2 & 4-x \end{vmatrix} \\ &= (2-x)(3+x)(x-4) + 24 - 3(3+x) + 4(2-x) \\ &= (6-x-x^2)(x-4) + 23 - 7x \\ &= 6x - x^2 - x^3 - 24 + 4x + 4x^2 + 23 - 7x \\ &= -x^3 + 3x^2 + 3x - 1 \\ &= -(x+1)(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

ですから、固有値は $-1, 2 \pm \sqrt{3}$ です。

出来なかった原因によって減点する

- A 計算ミス - 3 点
- B 固有ベクトルの一部が計算されていない - 5 点
- C 固有方程式が解けなかった - 3 点
- D 固有ベクトルが全く出ていない - 10 点
- E 固有値を一つのみと誤ってしまい他を計算しなかった - 6 点
- F ひどい計算ミス - 5 点

次に各固有値に対応した固有ベクトルを求めます。

固有値 -1 について： 題意の行列を M と書く事にすれば、 $M\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ となるベクトル $\mathbf{x}$ を求めれば良い事になりますが、これを整理して連立方程式の形で書けば

$$\begin{cases} 3x + 3z = 0 \\ 4x - 2y - 2z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

となっています。 -1 が固有値である事に依ればこの係数行列は正則ではありませんから 3 本のうち 2 本を満たす解は自動的に他の 1 本も満たしてしまいます。そこで第 1、2 式をとって、更に z を諦めて x, y を z で表す事を考えると、まず第 1 式から $x = -z$ であり、これを第 2 式に代入すれば $y = -3z$ が分かりますから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -3z \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が得られ、これが求める固有ベクトルです。

固有値 $2 + \sqrt{3}$ について： 題意の行列を M と書く事にすれば、 $M\mathbf{x} = (2 + \sqrt{3})\mathbf{x}$ となるベクトル $\mathbf{x}$ を求めれば良い事になりますが、これを整理して連立方程式の形で書けば

$$\begin{cases} -\sqrt{3}x + 3z = 0 \\ 4x - (5 + \sqrt{3})y - 2z = 0 \\ -x + 2y + (2 - \sqrt{3})z = 0 \end{cases}$$

となっています。 $2 + \sqrt{3}$ が固有値である事に依ればこの係数行列は正則ではありませんから 3 本のうち 2 本を満たす解は自動的に他の 1 本も満たしてしまいます。そこで第 1、2 式をとって、更に z を諦めて x, y を z で表す事を考えると、まず第 1 式から $x = \sqrt{3}z$ であり、これを第 2 式に代入すれば $y = \frac{4\sqrt{3}-2}{5+\sqrt{3}}z = (\sqrt{3}-1)z$ が分かりますから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}z \\ (\sqrt{3}-1)z \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3}-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られ、これが求める固有ベクトルです。

固有値 $2 - \sqrt{3}$ について： 題意の行列を M と書く事にすれば、 $M\mathbf{z} = (2 + \sqrt{3})\mathbf{z}$ となるベクトル $\mathbf{z}$ を求めれば良い事になりますが、これを整理して連立方程式の形で書けば

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + 3z = 0 \\ 4x - (5 - \sqrt{3})y - 2z = 0 \\ -x + 2y + (2 + \sqrt{3})z = 0 \end{cases}$$

となっています。 $2 + \sqrt{3}$ が固有値である事に依ればこの係数行列は正則ではありませんから3本のうち2本を満たす解は自動的に他の1本も満たしてしまいます。そこで第1、2式をとって、更に z を諦めて x, y を z で表す事を考えると、まず第1式から $x = -\sqrt{3}z$ であり、これを第2式に代入すれば $y = -\frac{4\sqrt{3}+2}{5-\sqrt{3}}z = (-1 - \sqrt{3})z$ が分かりますから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}z \\ (-1 - \sqrt{3})z \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

が得られ、これが求める固有ベクトルです。

7. 2つの平行でない2次元ベクトル $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ はどちらも2つの2次対称行列 P, Q 両方の固有ベクトルであるとしします。この時 PQ も対称行列であることを証明して下さい。

配点：5点 シラバス達成度目標：ウ、ク

解答例

$${}^t(PQ) = {}^tQ{}^tP = QP$$

なので、 $PQ = QP$ が言えれば良い事が分かります。

そこで、まず

$$P\mathbf{v} = a\mathbf{v}, P\mathbf{w} = b\mathbf{w}, Q\mathbf{v} = c\mathbf{v}, Q\mathbf{w} = d\mathbf{w}$$

であると仮定します。

2つの平行でないベクトル $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ を並べて出来る行列 $T = (\mathbf{v} \mathbf{w})$ は正則であって、 P, Q はどちらも T によって対角化されます：

$$T^{-1}PT = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, T^{-1}QT = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

すると、

$$\begin{aligned} PQ &= T \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} T^{-1} T \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} T^{-1} \\ &= T \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} T^{-1} \\ &= T \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix} T^{-1} \\ &= T \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} T^{-1} T \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} T^{-1} \\ &= QP \end{aligned}$$

が成り立ち、題意は示されました。

A 対角化を使っているもの 2点