

問題 1 $\triangle ABC$ において次の問いに答えて下さい：

- (1) 辺 BC を 5:3 に内分する点を D とした時、 $\vec{AD}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。
 (2) 辺 CA を 3:1 に内分する点を E とし、線分 BE と線分 AD の交点を F とします。このときどこかにある座標軸の原点を O として、 $\vec{OF}$ を $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ で表して下さい。

配点：(1) 10 点 (2) 10 点 シラバス達成度目標：ア、イ

【解答例】 (1) $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \frac{5}{8}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{5}{8}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{3}{8}\vec{AB} + \frac{5}{8}\vec{AC}$

- ケアレスミスのみ 8 点
- 少しの計算ミス 7 点
- 重大なミス、あるいはミスが多い 5 点

(2) $\vec{AF}$ は $\vec{AD}$ の定数倍ですから、仮に $\vec{AF} = m\vec{AD}$ とおけば、(1) の結果から

$$\vec{AF} = \frac{3m}{8}\vec{AB} + \frac{5m}{8}\vec{AC} \quad (0.1)$$

である事が分かります。

また、ベクトル $\vec{BF}$ はベクトル $\vec{BE}$ のやはり定数倍ですので、 $\vec{BF} = n\vec{BE}$ とおいて此れを変形すれば

$$\begin{aligned} \vec{BA} + \vec{AF} &= n(\vec{BA} + \vec{AE}) \\ \vec{AF} &= (1-n)\vec{AB} + n\vec{AE} = (1-n)\vec{AB} + \frac{n}{4}\vec{AC} \end{aligned} \quad (0.2)$$

です。

従って、(0.1) と (0.2) 式によれば

$$\begin{aligned} \frac{3m}{8}\vec{AB} + \frac{5m}{8}\vec{AC} &= (1-n)\vec{AB} + \frac{n}{4}\vec{AC} \\ \left(\frac{3m}{8} + n - 1\right)\vec{AB} &= \left(-\frac{5m}{8} + \frac{n}{4}\right)\vec{AC} \end{aligned}$$

となるのですが、 $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ は平行ではなく、両辺の係数は 0 である事、即ち

$$\begin{cases} \frac{3}{8}m + n = 1 \\ -\frac{5}{8}m + \frac{1}{4}n = 0 \end{cases}$$

が得られます。

第 2 式の 4 倍を第 1 式から引けば $\frac{23}{8}m = 1$ すなわち、 $m = \frac{8}{23}$ となってこれを (0.1) に戻してやれば

$$\begin{aligned} \vec{AF} &= \frac{3}{23}\vec{AB} + \frac{5}{23}\vec{AC} \\ \vec{AO} + \vec{OF} &= \frac{3}{23}(\vec{AO} + \vec{OB}) + \frac{5}{23}(\vec{AO} + \vec{OC}) \\ \vec{OF} &= \frac{15}{23}\vec{OA} + \frac{3}{23}\vec{OB} + \frac{5}{23}\vec{OC} \end{aligned}$$

である事が分かります。

□

○ 全体の流れが出来ていれば 基本点 6 点

- (1) でのミスによる間違いのみ + 3 点
- ケアレスミスのみ + 3 点
- 計算ミス少し + 2 点
- 計算ミスが多い + 0 点

● 上記に加えて、記述の不十分さがある場合 - 1 点

● この辺りぐらいまでのみ 5 点

問題 2 $(x, y, z) = (a, b, c)$ が Pythagorean 方程式 $x^2 + y^2 = z^2$ の正の整数解であるとき、これを次の行列 A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

で一次変換した点も Pythagorean 方程式の正の整数解になっていることを証明して下さい。

配点：5 点 シラバス達成度目標：カ

【解答例】 行列 A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

の表現する 3 次元空間内の一次変換による点 (a, b, c) の移り先は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b + 2c \\ 2a + b + 2c \\ 2a + 2b + 3c \end{pmatrix}$$

ですが、計算すると

$$\begin{aligned} & (a + 2b + 2c)^2 + (2a + b + 2c)^2 \\ &= 5a^2 + 5b^2 + 8c^2 + 8ab + 12bc + 12ca \\ &= (2a)^2 + (2b)^2 + (3c)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 2b + 2 \cdot 2b \cdot 3c + 2 \cdot 3c \cdot 2a + a^2 + b^2 - c^2 \\ &= (2a + 2b + 3c)^2 + a^2 + b^2 - c^2 \end{aligned}$$

となっており、もしも $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立っているならば、点 (a, b, c) の移り先である点 $(a + 2b + 2c, 2a + b + 2c, 2a + 2b + 3c)$ も $(a + 2b + 2c)^2 + (2a + b + 2c)^2 = (2a + 2b + 3c)^2$ を満たすことになります。□

- 表現の不十分さ - 1 点
- 具体例での計算のみのもの 2 点

問題 3 (1) 一般に、円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ 上の点 (p_1, p_2) に於ける円の接線は、

$$(p_1 - a)(x - a) + (p_2 - b)(y - b) = c^2$$

である事を示して下さい。

(2) 円 $x^2 + y^2 = 1$ に外部の点 $A(a_1, a_2)$ から引いた 2 本の接線の接点を $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$ とするとき (1) を参考にして接線 AP および AQ の方程式を求め、これを使って直線 PQ の方程式が $a_1x + a_2y = 1$ となる事を証明して下さい。

配点：(1) 5 点 (2) 5 点 シラバス達成度目標：イ

【解答例】 (1) この直線が点 (p_1, p_2) を通る事は、

$$(p_1 - a)(p_1 - a) + (p_2 - b)(p_2 - b) = (p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2 = c^2$$

より明らかですし、この直線の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} p_1 - a \\ p_2 - b \end{pmatrix}$ で、これは円の中心から点 (p_1, p_2) へ向かうベクトルに一致しています。従ってこの直線は接線である事が分かります。

(2) (1) の結果から、点 P, Q に於ける円の接線は、それぞれ

$$p_1x + p_2y = 1, \quad q_1x + q_2y = 1$$

である事が分かります。この 2 接線の交点が $A(a_1, a_2)$ でしたから、

$$p_1a_1 + p_2a_2 = 1, \quad q_1a_1 + q_2a_2 = 1$$

が成り立つはずですが、また、点 A は円の外部の点ですから原点ではなく、 a_1, a_2 のうち少なくとも一方は 0 ではありません。

しかしこの 2 式をよく見ると、これは 2 点 P, Q が、直線

$$a_1x + a_2y = 1$$

の上にあると云う事を示しています。

□

- 通る点は出来ている 3 点
- 傾きは出来ている 3 点
- 少しの計算のみ 2 点

- 記述の不十分さ - 1 点
- 途中までのみ 2 点

問題 4 次のベクトル・行列の計算をして下さい。ただし、書かれている計算が定義されない場合は『定義されないため計算不可能』と答えて下さい。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^2 \quad (4) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

配点：(1) 5 点 (2) 5 点 (3) 10 点 (4) 5 点 シラバス達成度目標：ウ

【解答例】 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} = (11) \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & 66 \end{pmatrix}$$

● 単純計算ミス 4 点
● 重大ミス 2 点

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (39) = \begin{pmatrix} 39 \\ 78 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

● 計算ミス少し 7 点
● 計算ミス多い、または重大ミス 4 点

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| \begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{smallmatrix} \right| \\ - \left| \begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{smallmatrix} \right| \\ \left| \begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

□

問題 5 行列 M :

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 29 & 29 \\ 4 & 14 & 13 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

の逆行列 M^{-1} を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：ウ、オ

【解答例 掃き出し法】

8 29 29	1 0 0	(1)
4 14 13	0 1 0	(2)
1 3 2	0 0 1	(3)
1 3 2	0 0 1	(3)
8 29 29	1 0 0	(1)
4 14 13	0 1 0	(2)
1 3 2	0 0 1	(3)
0 5 13	1 0 -8	(1) - 8(3) = (4)
0 2 5	0 1 -4	(2) - 4(3) = (5)
2 6 4	0 0 2	2(3) = (6)
0 2 5	0 1 -4	(5)
0 10 26	2 0 -16	2(4) = (7)
2 0 -11	0 -3 14	(6) - 3(5) = (8)
0 2 5	0 1 -4	(5)
0 0 1	2 -5 4	(7) - 5(5) = (9)
2 0 0	22 -58 58	(8) + 11(9) = (10)
0 2 0	-10 26 -24	(5) - 5(9) = (11)
0 0 1	2 -5 4	(9)
1 0 0	11 -29 29	$\frac{1}{2}(10)$
0 1 0	-5 13 -12	$\frac{1}{2}(11)$
0 0 1	2 -5 4	(9)

● ミス少し 8 点
● ミス多い 5 点
● ケアレスミス -1 点

従って求める逆行列は

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -29 & 29 \\ -5 & 13 & -12 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

です。

□

【解答例 外積法】

$$\begin{pmatrix} 29 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 29 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 14 & 13 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 29 & 29 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 29 & 29 \\ 14 & 13 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 29 \\ -29 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 29 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 13 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 29 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 29 & 8 \\ 13 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 29 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 14 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 8 & 29 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 8 & 29 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- 計算ミス少し - 2 点
- 計算ミス多い - 5 点
- 重大ミス - 5 点
- ケアレスミスのみ - 1 点

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 29 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 29 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 29 \\ -29 \end{pmatrix} = -88 + 116 - 29 = -1$$

以上により求める逆行列は

$$-\begin{pmatrix} -11 & 29 & -29 \\ 5 & -13 & 12 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -29 & 29 \\ -5 & 13 & -12 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

です。

□

【解答例 余因子法】

$$M_{1,1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 14 & 13 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11$$

$$M_{1,2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 13 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$M_{1,3} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 14 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$M_{2,1} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 29 & 29 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 29$$

$$M_{2,2} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 8 & 29 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -13$$

$$M_{2,3} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 8 & 29 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$M_{3,1} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 29 & 29 \\ 14 & 13 \end{vmatrix} = -29$$

$$M_{3,2} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 8 & 29 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = 12$$

$$M_{3,3} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 8 & 29 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = -4$$

- 符号ミスのみ - 2 点
- ミス少し - 2 点
- ミス多い - 5 点
- 重大ミス - 5 点
- 転置忘れ - 1 点

ですから、余因子展開により

$$|M| = 8(-11) + 29 \cdot 5 + 29(-2) = -1$$

も分かり、結局求める逆行列は

$$M^{-1} = -\begin{pmatrix} -11 & 29 & -29 \\ 5 & -13 & 12 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -29 & 29 \\ -5 & 13 & -12 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

となります。

□

問題 6 次の行列式を因数分解して下さい。

$$(1) \begin{vmatrix} 1-x & d & -d \\ d & 1-x & d \\ -d & d & 1-x \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} s & s^2 & t+u \\ t & t^2 & u+s \\ u & u^2 & s+t \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} l+m+2n & l & m \\ n & 2l+m+n & m \\ n & l & l+2m+n \end{vmatrix}$$

配点：各 10 点 シラバス達成度目標：エ

【解答例】 (1)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1-x & d & -d \\ d & 1-x & d \\ -d & d & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & d & 0 \\ d & 1-x & 1-x+d \\ -d & d & 1-x+d \end{vmatrix} \\ & \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (1) \quad (2) \quad (3)+(2) \\ & = (1-x+d) \begin{vmatrix} 1-x & d & 0 \\ d & 1-x & 1 \\ -d & d & 1 \end{vmatrix} \quad (4) \\ & \quad (5) \quad (6) \\ & = (1-x+d) \begin{vmatrix} 1-x & d & 0 \\ 2d & 1-x-d & 0 \\ -d & d & 1 \end{vmatrix} \quad (4) \\ & \quad (5)-(6) \quad (6) \\ & = (1-x+d)1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1-x & d \\ 2d & 1-x-d \end{vmatrix} \quad (7) \quad (8) \\ & = (1-x+d)1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1-x & 1-x+d \\ 2d & 1-x+d \end{vmatrix} \quad (9) \\ & \quad (7) \quad (8)+(7) \quad (10) \\ & = (1-x+d) \begin{vmatrix} 1-x & 1-x+d \\ x-1+2d & 0 \end{vmatrix} \quad (9) \\ & \quad (10)-(9) \\ & = (1-x+d)^2(1-x-2d) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} s & s^2 & t+u \\ t & t^2 & u+s \\ u & u^2 & s+t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & s^2 & s+t+u \\ t & t^2 & s+t+u \\ u & u^2 & s+t+u \end{vmatrix} \\ & \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (1) \quad (2) \quad (3)+(1) \\ & = (s+t+u) \begin{vmatrix} s & s^2 & 1 \\ t & t^2 & 1 \\ u & u^2 & 1 \end{vmatrix} \quad (4) \\ & \quad (5) \quad (6) \\ & = (s+t+u) \begin{vmatrix} s & s^2 & 1 \\ t-s & t^2-s^2 & 0 \\ u-s & u^2-s^2 & 0 \end{vmatrix} \quad (4) \\ & \quad (5)-(4) \quad (6)-(4) \\ & = (s+t+u)(t-s)(u-s) \begin{vmatrix} s & s^2 & 1 \\ 1 & t+s & 0 \\ 1 & u+s & 0 \end{vmatrix} \\ & = (s+t+u)(t-s)(u-s)1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & t+s \\ 1 & u+s \end{vmatrix} \\ & = (s+t+u)(s-t)(t-u)(u-s) \end{aligned}$$

- ケアレスミスのみ - 2 点
- 計算ミス少し - 3 点
- 計算ミス多い - 5 点
- 因数分解していないもの - 6 点
- 少しの計算のみ 3 点

(3)

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{ccc} l+m+2n & l & m \\ n & 2l+m+n & m \\ n & l & l+2m+n \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \\
= & \left| \begin{array}{ccc} l+m+n & -l-m-n & 0 \\ n & 2l+m+n & m \\ 0 & -l-m-n & l+m+n \end{array} \right| \begin{array}{l} (1)-(2) \\ (2) \\ (3)-(2) \end{array} \\
= & (l+m+n)^2 \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ n & 2l+m+n & m \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ (4) \quad (5) \quad (6) \end{array} \\
= & (l+m+n)^2 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ n & 2l+2m+2n & m \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ (4) \quad (5)+(4)+(6) \quad (6) \end{array} \\
= & 2(l+m+n)^3 (-1)^{2+2} \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| \\
= & 2(l+m+n)^3
\end{aligned}$$