

問題 1 $\triangle ABC$ において次の問いに答えて下さい：

- (1) 辺 BC を 7:2 に内分する点を D とした時、 $\vec{AD}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。
 (2) 辺 CA 上に点 E があって、 $\triangle ABE$ と $\triangle BCE$ の面積比が 3:2 であるとします。このとき線分 BE と線分 AD の交点を F 、座標軸の原点を O としたときに $\vec{OF}$ を $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ で表して下さい。

配点：(1) 10 点、(2) 5 点 シラバス達成度目標：ア、イ

【解答例】 (1) $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \frac{7}{9}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{7}{9}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{2}{9}\vec{AB} + \frac{7}{9}\vec{AC}$

- 係数が逆になっているもの - 2 点
- 計算ミス - 3 点 ~ - 5 点

(2) $\vec{AF}$ は $\vec{AD}$ の定数倍ですから、仮に $\vec{AF} = m\vec{AD}$ とおけば、(1) の結果から

$$\vec{AF} = \frac{2m}{9}\vec{AB} + \frac{7m}{9}\vec{AC} \quad (0.1)$$

である事が分かります。

また、 $\triangle ABE$ と $\triangle BCE$ は、それぞれの底辺を AE, EC とした場合同じ高さをもちますから、面積の比は底辺の長さの比と一致し、結局 $AE : EC = 3 : 2$ である事が分かります。

するとベクトル $\vec{BF}$ はベクトル $\vec{BE}$ のやはり定数倍ですので、 $\vec{BF} = n\vec{BE}$ とおいて此れを変形すれば

$$\begin{aligned} \vec{BA} + \vec{AF} &= n(\vec{BA} + \vec{AE}) \\ \vec{AF} &= (1-n)\vec{AB} + n\vec{AE} = (1-n)\vec{AB} + \frac{3n}{5}\vec{AC} \end{aligned} \quad (0.2)$$

です。

従って、(0.1) と (0.2) 式によれば

$$\begin{aligned} \frac{2m}{9}\vec{AB} + \frac{7m}{9}\vec{AC} &= (1-n)\vec{AB} + \frac{3n}{5}\vec{AC} \\ \left(\frac{2m}{9} + n - 1\right)\vec{AB} &= \left(-\frac{7m}{9} + \frac{3n}{5}\right)\vec{AC} \end{aligned}$$

となるのですが、 $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ は平行ではなく、両辺の係数は 0 である事、即ち

$$\begin{cases} \frac{2}{9}m + n = 1 \\ -\frac{7}{9}m + \frac{3}{5}n = 0 \end{cases}$$

が得られます。

- 全体の流れが通っていれば 3 点
- 連立方程式を解いていないもの 2 点
- 途中までのもの 2 点

第 1 式から $n = 1 - \frac{2}{9}m$ ですからこれを第 2 式に代入すれば $m = \frac{27}{41}$ となってこれを (0.1) に戻してやれば

$$\begin{aligned} \vec{AF} &= \frac{6}{41}\vec{AB} + \frac{21}{41}\vec{AC} \\ \vec{AO} + \vec{OF} &= \frac{6}{41}(\vec{AO} + \vec{OB}) + \frac{21}{41}(\vec{AO} + \vec{OC}) \\ \vec{OF} &= \frac{14}{41}\vec{OA} + \frac{6}{41}\vec{OB} + \frac{21}{41}\vec{OC} \end{aligned}$$

である事が分かります。 □

問題 2 Pell's 方程式 $x^2 - 8y^2 = 1$ について、以下の問いに答えて下さい：

(1) $1 \leq x \leq 10, 1 \leq y \leq 10$ の範囲内にこの方程式の整数解が一つあります。それを探して下さい。

(2) (1) で求めた解を $(x, y) = (m, n)$ とします。このとき、点 $(m, -n)$ を点 $(1, 0)$ に移し、また点 $(1, 0)$ を点 (m, n) に移す一次変換の表現行列を求めて下さい。

(3) 問題の方程式の正の整数解をあと 2 組求めて下さい。

配点：(1) 5 点、(2) 3 点、(3) 2 点 シラバス達成度目標：カ

【解答例】 (1) $(x, y) = (3, 1)$

(2) 求める行列を M とすれば、

$$M \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

● ここまで 1 点

となります。

● 一方のみのもの - 1 点

(3)

$$M \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 35 \end{pmatrix}$$

であり、 $(x, y) = (17, 6), (99, 35)$ は

$$17^2 - 8 \cdot 6^2 = 1, \quad 99^2 - 8 \cdot 35^2 = 1$$

となっていますので問題の方程式の正の整数解になっています。

□

問題 3 次のベクトル・行列の計算をして下さい。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

配点：各 5 点 シラバス達成度目標：ア、ウ

● 最後転置しているもの 4 点

【解答例】 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

● 2 つの積の一方は出来ている 3 点

(3)

$$3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = 0$$

問題 4 行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 8 & 29 & 29 \\ 4 & 14 & 13 \end{pmatrix}$ の逆行列を掃き出し法で求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：ウ、オ

【解答例】

1	3	2	1	0	0	(1)
8	29	29	0	1	0	(2)
4	14	13	0	0	1	(3)
1	3	2	1	0	0	(1)
0	5	13	-8	1	0	(2) - 8(1) = (4)
0	2	5	-4	0	1	(3) - 4(1) = (5)
5	15	10	5	0	0	5(1) = (6)
0	5	13	-8	1	0	(4)
0	10	25	-20	0	5	5(5) = (7)
5	0	-29	29	-3	0	(6) - 3(4) = (8)
0	5	13	-8	1	0	(4)
0	0	-1	-4	-2	5	(7) - 2(4) = (9)
5	0	-29	29	-3	0	(8)
0	5	13	-8	1	0	(4)
0	0	1	4	2	-5	-(9) = (10)
5	0	0	145	55	-145	(8) + 29(10) = (11)
0	5	0	-60	-25	65	(4) - 13(10) = (12)
0	0	1	4	2	-5	(10)
1	0	0	29	11	-29	(11)/5
0	1	0	-12	-5	13	(12)/5
0	0	1	4	2	-5	(10)

以上により求める逆行列は次の通りです：

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 29 & 11 & -29 \\ -12 & -5 & 13 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

問題 5 次の行列式を計算して下さい。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & p & v+w \\ 1 & v & w+p \\ 1 & w & p+v \end{vmatrix}$$

配点：各 10 点 シラバス達成度目標：エ

【解答例】 (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & p & v+w \\ 1 & v & w+p \\ 1 & w & p+v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p & p+v+w \\ 1 & v & v+w+p \\ 1 & w & w+p+v \end{vmatrix} = (p+v+w) \begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ 1 & v & 1 \\ 1 & w & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- 計算ミス少しのもの 8 点
- 計算ミスが多いもの 6 点

- 符号のみのミス 8 点
- 少しの計算ミス 7 点
- 全体の筋は良いがミスが多い 6 点
- やり方がひどい 3 点

問題 6 正則でない正方行列は固有値 0 をもつ事を証明して下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：エ、キ

【解答例】 M を正則でない正方行列とします、すると

$$0 = |M| = |M - 0E|$$

ですから、固有方程式は解 0 をもち、題意が成り立ちます。

- 少しのみ 2 点

- 表現が不十分なもの 8 点
- 論理が不十分なもの 6 点

問題 7 行列 $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値とそれぞれの固有値に対応した固有ベクトルを求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：キ

【解答例】 まず固有方程式を解くと

$$0 = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & -1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ -1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (2-x)(1-x)^2 - (1-x) - (1-x) = x(1-x)(x-3)$$

から固有値は 0, 1, 3 です。

- 固有値までのもの 4 点

次に各固有値に対応した固有ベクトルを求めます。

【固有値 0】

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{X} = \mathbb{O}$$

となる $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求めれば良く、係数行列が正則でない事を考えればこの連立方程式は

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

と同値ですから、 $y = -x, z = x$ となって

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られます。従って求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

が得られます。従って求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ です。

□

【固有値 1】

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{X} = \mathcal{O}$$

となる $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求めれば良く、 $x = 0, z = y$ となって

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られます。従って求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

【固有値 3】

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbb{X} = \mathcal{O}$$

となる $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求めれば良く、係数行列が正則でない事を考えればこの連立方程

式は

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

と同値ですから、 $x = 2y, z = -y$ となって

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- 固有値を求めて、固有ベクトルを求めて
全体の流れが正しく出来ているものなら

最低限 6 点

- 計算ミス少しのもの 8 点
- 計算ミスが多いもの 6 点

問題 8 方程式 $3x^2 - 10xy + 5y^2 = 1$ の表す曲線は楕円・双曲線のどちらでしょうか。

配点：5 点 シラバス達成度目標：ク

• ここで 2 点

【解答例】 問題の方程式を変形すると

$$1 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であり、この係数行列は対称行列になっていますから必ず重複度も込みで2つの実固有値をもち、仮にそれらを p, r とすると、それらの積が行列式に一致しますから $pr = -10$ が分かります。

従って固有値は異なる2つであり、一方はマイナス、もう一方はプラスである事が分かります。

更にそれぞれの固有値に対応した長さが1の固有ベクトルを $\mathbb{V}_p, \mathbb{V}_r$ と置けばこれらは直交しますから、これらを並べて出来る行列 Q ：

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbb{V}_p & \mathbb{V}_r \end{pmatrix}$$

は直交行列になります。すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} Q &= \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{V}_p & \mathbb{V}_r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p\mathbb{V}_p & r\mathbb{V}_r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{V}_p & \mathbb{V}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} &= Q \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} Q^{-1} \end{aligned}$$

と変形されますので、これを最初の方程式を変形したものに代入すれば $Q^{-1} = {}^t Q$ に

注意して

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}^t \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書けますから、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と置けば

$$1 = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = pX^2 + rY^2$$

が得られます。

p, r は一方が負で一方が正でしたから、これは双曲線を表しており、これを直交行列の表す一次変換で移したものが元の曲線ですから、元の問題の曲線も双曲線であったと結論されます。 □

• 答えのみのもの 2 点