問題 **1** $\triangle ABC$ において次の問いに答えて下さい：

（１）辺 BC を 2:3 に内分する点を D とした時、$\overrightarrow{AD}$ を $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ で表して下さい。

（２）辺 BC の延長線上に点 E があり、３点は E, B, C の順に並んでいて、点 B は線分 EC を 2:5 に内分しているとします。このとき $\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ で表して下さい。

配点：（１）１０点、（２）１０点	シラバス達成度目標：ア、イ

【解答例】　（１）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

（２）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)\\ &= \frac{7}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

計算ミス　－４点

少しの計算のみ　２～４点

絵を描き間違えたことによるミスのみ　－２点

問題 **2** （１）a, b, c は実数であり、a, b の少なくとも一方は 0 ではないものとします。

直線 $ax+by+c=0$ が円周 $x^2+y^2=1$ と接するための a, b, c の条件は $a^2+b^2=c^2$ であることを証明して下さい。

（２）放物線 $y=x^2-2$ 上に異なる２点 $P(p, p^2-2), R(r, r^2-2)$ があります。２点 P, R を通る直線の方程式を求め、それが円周 $x^2+y^2=1$ と接するための p, r の条件を（１）の条件式を使って求めて下さい。

（３）同じ放物線上に P, R と異なる第３の点 $V(v, v^2-2)$ があって、２点 R, V を通る直線は円周 $x^2+y^2=1$ と接しているとします。また２点 P, R を通る直線もこの円周に接しているとします。このとき２点 V, P を通る直線も円周 $x^2+y^2=1$ に接していることを証明して下さい。

配点：（１）１０点、（２）と（３）で合計５点	シラバス達成度目標：ア、イ

【解答例】　（１）$a \neq 0$ の場合。

このとき直線の方程式から $x=\frac{1}{a}(-by-c)$ ですからこれを円周の方程式に代入して

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2}(-by-c)^2+y^2&=1\\ b^2y^2+2bcy+c^2+a^2y^2&=a^2\\ (a^2+b^2)y^2+2bcy+c^2-a^2&=0\end{aligned}$$

a,b が０である場合の考慮が不足しているもの　－１点

が得られますから、接する条件はこの２次方程式が重解となることであって、判別式を計算して

$$\begin{aligned}0&=4b^2c^2-4(a^2+b^2)(c^2-a^2)\\ &=b^2c^2-a^2c^2+a^4-b^2c^2+b^2a^2\\ &=a^2(a^2+b^2-c^2)\\ &=a^2+b^2-c^2\end{aligned}$$

少しの計算のみ　３点

が得られます。

$a=0$ のときは $b \neq 0$ なので直線は $y=-\frac{c}{b}$ であり、この直線が問題の円周に接するためには $\left|-\frac{c}{b}\right|=1$ であれば良く、この式を変形すると $b^2=c^2$ が得られます。従って $a=0$ のときも題意は成り立っていることが分かります。

（２）２点を通る直線の方程式は

$$y-p^2+2=\frac{r^2-2-p^2+2}{r-p}(x-p)$$
$$0=(r+p)(x-p)-y+p^2-2$$
$$0=(r+p)x-y-pr-2$$

ですから、（１）の結果から、接するための条件は

$$(p+r)^2+1=(pr+2)^2$$

です。

（３）直線 RV が円周に接する条件から

$$(r+v)^2+1=(rv+2)^2$$

であり、直線 PR が接する条件から

$$(p+r)^2+1=(pr+2)^2$$

です。これは X の２次方程式：

$$(r+X)^2+1=(rX+2)^2, \quad \text{すなわち} \quad (r^2-1)X^2+2rX+3-r^2=0$$

が２つの異なる解 p,v をもつことを示しており、解と係数の関係から

$$v+p=-\frac{2r}{r^2-1}, \quad vp=\frac{3-r^2}{r^2-1}$$

が分かります。このとき、

$$vp+2=\frac{3-r^2}{r^2-1}+2=\frac{1+r^2}{r^2-1}$$
$$(v+p)^2+1=\frac{4r^2}{(r^2-1)^2}+1=\frac{r^2+2r+1}{(r^2-1)^2}=(vp+2)^2$$

となって、直線 VP が円周と接することが分かります。

この条件が出来ていれば　3点

それ以前は　1～2点

それ以降も計算してあって
解と係数の関係に注目し
惜しいところまで行っているもの　4点

問題 **3**　（１）A を正方行列とするとき、${}^tA+A$ は対称行列であることを証明して下さい。

（２）２次正方行列 M が ${}^tM=M^{-1}$ を満たすとき（つまり直交行列であるとき)、任意の２次元ヴェクター $\mathbb{a},\mathbb{b}$ に対して

$$(M\mathbb{a})\cdot(M\mathbb{b})=\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}$$

が成り立つことを証明して下さい。

配点：（１）５点、（２）５点	シラバス達成度目標：ウ

具体例、あるいは
２次の場合のみ　２点

【解答例】　（１）

$${}^t\left({}^tA+A\right)=A+{}^tA={}^tA+A$$

ミスのあるもの、
途中までのもの　３点

により対称行列です。

（２）条件により、任意の $\mathbb{a},\mathbb{b}$ に対して

$$(M\mathbb{a})\cdot(M\mathbb{b})={}^t\mathbb{a}{}^tMM\mathbb{b}={}^t\mathbb{a}\mathbb{b}=\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}$$

となります。

具体例のみ　２点

問題 **4** 次の各行列の型を答え、更に転置した行列を求めて下さい：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

配点：（１）５点、（２）５点	シラバス達成度目標：ウ

【解答例】　（１）(1,3)-型。

$$ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} $$

（２）(3,2)-型。

$$ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} $$

型で２点、転置で３点

書きミス　－１点

記述の不備　－１点

問題 **5** 次のヴェクター・行列の計算をして下さい。ただし、書かれている計算が定義されない場合は『定義されないため計算不可能』と答えて下さい。a, b, X, Y は全て実数であるとします。

（１）$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$　（２）$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}$　（３）$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

配点：（１）５点、（２）５点、（３）５点	シラバス達成度目標：ウ

【解答例】　（１）

$$ \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = aX = bY $$

完全解答

（２）

$$ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX & aY \\ bX & bY \end{pmatrix} $$

（３）定義されないため計算不可能。

問題 **6** 行列 $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列 M^{-1} を求めて下さい。

配点：１５点	シラバス達成度目標：ウ、オ

【解答例】

2	2	-3	1	0	0	(1)
1	-1	2	0	1	0	(2)
3	0	4	0	0	1	(3)
1	-1	2	0	1	0	(2)
2	2	-3	1	0	0	(1)
3	0	4	0	0	1	(3)
1	-1	2	0	1	0	(2)
0	4	-7	1	-2	0	$(1)-2(2)=(4)$
0	3	-2	0	-3	1	$(3)-3(2)=(5)$
1	-1	2	0	1	0	(2)
0	1	-5	1	1	-1	$(4)-(5)=(6)$
0	3	-2	0	-3	1	(5)
1	0	-3	1	2	-1	$(2)+(6)=(7)$
0	1	-5	1	1	-1	(6)
0	0	13	-3	-6	4	$(5)-3(6)=(8)$
13	0	-39	13	26	-13	$13(7)=(9)$
0	13	-65	13	13	-13	$13(6)=(10)$
0	0	13	-3	-6	4	(8)
13	0	0	4	8	-1	$(9)+3(8)$
0	13	0	-2	-17	7	$(10)+5(8)$
0	0	13	-3	-6	4	(8)

従って求める逆行列は $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 \\ -2 & -17 & 7 \\ -3 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ です。

●掃き出し法の場合

計算ミス　－５点

ミスが多いもの－１０点

●余因子法等の場合

転置のみのミス	**－３点**
余因子１つのみのミス	**－３点**
行列式のミス	**－５点**
符合のみのミス	**－３点**
余因子計算ミス複数	**－５点**
ミスが更に多いもの	**－１０点**

問題 **7** 次の行列式を計算し、（２）は因数分解して下さい。

（１）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$　（２）$\begin{vmatrix} s & s^2 & t+u \\ t & t^2 & u+s \\ u & u^2 & s+t \end{vmatrix}$

配点：（１）１０点、（２）５点	シラバス達成度目標：エ

計算ミス　－３点

ミスが多い、重大なミス　－５点

【解答例】　（１）

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{matrix}\right| \begin{matrix} (1) \\ (2)-(1) \\ (3)-(1) \end{matrix} = 0$$

（２）

計算ミス　－２点

途中までのもの　－３点

符号のミスのみ　－１点

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} s & s^2 & t+u \\ t & t^2 & u+s \\ u & u^2 & s+t \end{vmatrix} \\ (1)\quad(2)\quad(3) \end{array} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} s & s^2 & s+t+u \\ t & t^2 & s+t+u \\ u & u^2 & s+t+u \end{vmatrix} \\ (1)\quad(2)\quad(3)+(1) \end{array}$$

$$= (s+t+u)\left|\begin{matrix} s & s^2 & 1 \\ t & t^2 & 1 \\ u & u^2 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

$$= (s+t+u)\left|\begin{matrix} s & s^2 & 1 \\ t-s & t^2-s^2 & 0 \\ u-s & u^2-s^2 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} (4) \\ (5)-(4) \\ (6)-(4) \end{matrix}$$

$$= (s+t+u)(t-s)(u-s)\begin{vmatrix} s & s^2 & 1 \\ 1 & t+s & 0 \\ 1 & u+s & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (s+t+u)(t-s)(u-s)1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & t+s \\ 1 & u+s \end{vmatrix}$$

$$= (s+t+u)(s-t)(t-u)(u-s)$$