

問題 1 a, b は正の定数であるとします。直線 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ と原点 $(0, 0)$ との距離を求めて下さい。

配点：5 点 シラバス達成度目標：ア、イ

【解答例】 直線 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ は x -軸上の点 $A(a, 0)$ と y -軸上の点 $B(0, b)$ を通るので、求める距離を d とすると三角形 $\triangle OAB$ の面積 S は辺 AB を底辺と見て

$$S = \frac{1}{2}(\text{底辺}) \cdot (\text{高さ}) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}d$$

となります。

しかし、辺 OA を底辺と見れば

$$S = \frac{1}{2}ab$$

でもありますから、

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}d = \frac{1}{2}ab$$

$$d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

が得られます。

□

問題 2 3 本の 4 次元ベクトルの組：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

は一次独立であることを示して下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：ア

【解答例】

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

であると仮定するとこれは

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 2a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 \\ 4a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を意味しますから、まず第 1、4 成分から $a_1 = 0, a_3 = 0$ が分かり、これを代入すれば第 2 成分から $a_2 = 0$ も得られます。

以上により、問題のベクトルの組は一次独立であることが分かりました。 □

問題 3 次の行列式を計算して下さい：

$$(1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^3 & w^4 \end{vmatrix}$$

ただし、(2) は因数分解した形で答えて下さい。

配点：(1) 10 点、(2) 10 点 シラバス達成度目標：エ

【解答例】 (1)

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 - 1 - 2 = -6$$

(2)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^3 & w^4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 0 & w^3 - w & w^4 - w^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & w - 1 & w^2 - 1 \\ 0 & w^3 - w & w^4 - w^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} w - 1 & w^2 - 1 \\ w(w^2 - 1) & w^2(w^2 - 1) \end{vmatrix} \\ &= w(w - 1)(w^2 - 1) \begin{vmatrix} 1 & w + 1 \\ 1 & w \end{vmatrix} \\ &= -w(w - 1)^2(w + 1) \end{aligned}$$

問題 4 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を掃き出し法によって求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：オ

【解答例】

1	2	3	1	0	0	(1)
2	0	2	0	1	0	(2)
3	2	1	0	0	1	(3)
1	2	3	1	0	0	(1)
0	-4	-4	-2	1	0	(2) - 2(1) = (4)
0	-4	-8	-3	0	1	(3) - 3(1) = (5)
1	2	3	1	0	0	(1)
0	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}(4) = (6)$
0	-4	-8	-3	0	1	(5)
1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	(1) - 2(6) = (7)
0	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	(6)
0	0	-4	-1	-1	1	(5) + 4(6) = (8)
1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	(7)
0	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	(6)
0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}(8) = (9)$
1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	(7) - (9)
0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	(6) - (9)
0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	(9)

□ 従って求める逆行列は $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ です。

□

問題 5 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の表す一次変換によって直線 $y = -x + k$ は自分自身に移る
 そうです。さて k の値は何でしょうか。

配点：10 点 シラバス達成度目標：カ

【解答例】 この直線上の点 $(t, -t + k)$ の移り先は

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -t + k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + k \\ -t + 2k \end{pmatrix}$$

により点 $(t + k, -t + 2k)$ ですが、この点が任意の t に対して元の直線上にあると仮定
 します。すると

$$\begin{aligned} -t + 2k &= -(t + k) + k \\ k &= 0 \end{aligned}$$

が得られます。従って $k = 0$ である必要があります。

逆に $k = 0$ の場合、直線の全体が同じ直線の全体に移ることは上の計算（の $k = 0$ の
 場合）により明らかです。

以上により、求める k の値は 0 です。□

問題 6 行列

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えて下さい。

- (1) 行列 B の固有値が $0, 3, 6$ であることを証明して下さい。
- (2) それぞれの固有値に対応した固有ベクトルを求めて下さい。
- (3) 行列 B を対角化して下さい。

配点：(1) 15 点 (2) 10 点 (3) 5 点 シラバス達成度目標：キ

【解答例】 (1)

$$\begin{aligned} |B - kE| &= \begin{vmatrix} 2-k & -1 & 2 \\ -1 & 5-k & -1 \\ 2 & -1 & 2-k \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3-k & -1 & 2 \\ 3-k & 5-k & -1 \\ 3-k & -1 & 2-k \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3-k & -1 & 2 \\ 0 & 6-k & -3 \\ 0 & 0 & -k \end{vmatrix} \\ &= -k(k-3)(k-6) \end{aligned}$$

によれば固有方程式の実数解、即ち固有値は $0, 3, 6$ です。

(2) 【固有値 0 について】 $B_{\mathbb{X}} = \mathcal{O}$ 、すなわち

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -x + 5y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

を満たす $\mathbb{X}$ を求めます。第 1 式と第 3 式は同じですから、この連立方程式は実質 2 本であり、 z をあきらめれば

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{9} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ですから求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ です。

【固有値 3 について】 $B_{\mathbb{X}} = 3\mathbb{X}$ 、すなわち

$$\begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

を満たす $\mathbb{X}$ を求めます。係数行列は正則ではありませんから、この連立方程式は実質 2 本であり、第 1、2 式を使って z をあきらめれば

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{-3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ですから求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

【固有値 6 について】 $B_{\mathbb{X}} = 6\mathbb{X}$ 、すなわち

$$\begin{cases} -4x - y + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ 2x - y - 4z = 0 \end{cases}$$

を満たす $\mathbb{X}$ を求めます。係数行列は正則ではありませんから、この連立方程式は実質 2 本であり、第 1、2 式を使って z をあきらめれば

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となり、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ですから求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

(3) 固有ベクトルを並べた行列を $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば、行列式の計算

によりこれは正則行列です（問題3（1）参照）。

この逆行列を計算すると

$$P^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、従って

$$P^{-1}MP = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

となって対角化が得られました。

□

問題 7（1）

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるような実数 p, r を求めて下さい。

(2) 行列：

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

の固有値・固有ベクトルを求めて下さい。

(3) 次の様な連立線形漸化式：

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - b_n \\ b_{n+1} = 6a_n - 2b_n \end{cases}, \quad a_0 = 1, b_0 = 2$$

を満たす数列 $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}, \{b_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ を求めて下さい。

配点：(1)(3) 計5点、(2) 10点	シラバス達成度目標：ウ、キ、ク
-----------------------	-----------------

【解答例】 (2)

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

によれば、固有値は $-1, 4$ であり、対応した固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \left\{ p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から、

$$\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

が分かります。

(3)

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば上の結果により M は

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

と対角化されます。

一方漸化式によれば

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

であって、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= (PDP^{-1})^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \\ &= PD^nP^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 4 \cdot 4^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} (-1)^n + 4 \cdot 4^n \\ 6(-1)^n + 4 \cdot 4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られます。

□