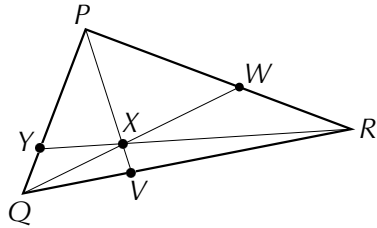


1 (1) 平面上に異なる 3 点 A, B, C があって、線分 BC を s 対 t に内分する点を D としたとき、

$$\vec{AD} = \frac{t\vec{AB} + s\vec{AC}}{s+t}$$

となることを証明して下さい。

(2) 3 角形 PQR において辺 QR を $1:2$ に内分する点を V 、辺 RP を $2:3$ に内分する点を W とし、2 つの線分 PV と QW の交点を X とするとき、ベクトル $\vec{PX}$ を 2 つのベクトル $\vec{PQ}, \vec{PR}$ で表して下さい。



(3) 線分 RX の延長線と辺 PQ の交点を Y とするとき、線分 PY と線分 YQ の比を求めて下さい。

配点：(1)5 点、(2)10 点、(3)5 点 シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】 (1)

$$\begin{aligned} \vec{AD} &= \vec{AB} + \vec{BD} \\ &= \vec{AB} + \frac{s}{s+t}\vec{BC} \\ &= \vec{AB} + \frac{s}{s+t}(\vec{BA} + \vec{AC}) \\ &= \left(1 - \frac{s}{s+t}\right)\vec{AB} + \frac{s}{s+t}\vec{AC} \\ &= \frac{t\vec{AB} + s\vec{AC}}{s+t} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\vec{PV} = \frac{2\vec{PQ} + \vec{PR}}{3}, \quad \vec{QW} = \frac{3\vec{QR} + 2\vec{QP}}{5}$$

が分かりますから、

$$\vec{PX} = t\vec{PV}, \quad \vec{QX} = u\vec{QW}$$

と置けば、

$$\begin{aligned} \vec{PX} &= t \cdot \frac{2\vec{PQ} + \vec{PR}}{3} \\ &= \frac{2}{3}t\vec{PQ} + \frac{1}{3}t\vec{PR} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{PX} &= \vec{PQ} + \vec{QX} \\ &= \vec{PQ} + u \cdot \frac{3\vec{QR} + 2\vec{QP}}{5} \\ &= \left(1 - \frac{2}{5}u\right)\vec{PQ} + \frac{3}{5}u(\vec{QP} + \vec{PR}) \\ &= (1-u)\vec{PQ} + \frac{3}{5}u\vec{PR} \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}t\vec{PQ} + \frac{1}{3}t\vec{PR} &= (1-u)\vec{PQ} + \frac{3}{5}u\vec{PR} \\ \left(\frac{2}{3}t + u - 1\right)\vec{PQ} &= \left(-\frac{1}{3}t + \frac{3}{5}u\right)\vec{PR} \end{aligned}$$

となり、 $\vec{PQ}$ と $\vec{PR}$ が共にゼロベクトルでなく平行でないことにより連立方程式：

$$\begin{cases} \frac{2}{3}t + u - 1 = 0 \\ -\frac{1}{3}t + \frac{3}{5}u = 0 \end{cases}$$

が得られます。第 1 式と第 2 式の 2 倍を辺々加えれば $\frac{11}{5}u = 1$ 、従って $u = \frac{5}{11}$ が分かります。

以上から

$$\vec{PX} = (1-u)\vec{PQ} + \frac{3}{5}u\vec{PR} = \frac{6}{11}\vec{PQ} + \frac{3}{11}\vec{PR}$$

です。

(3)

$$\begin{aligned}
\vec{RX} &= \vec{RP} + \vec{PX} \\
&= \vec{RP} + \frac{6}{11}\vec{PQ} + \frac{3}{11}\vec{PR} \\
&= \frac{8}{11}\vec{RP} + \frac{6}{11}\left(\vec{PR} + \vec{RQ}\right) \\
&= \frac{2}{11}\vec{RP} + \frac{6}{11}\vec{RQ} \\
&= \frac{8}{11}\left(\frac{2}{8}\vec{RP} + \frac{6}{8}\vec{RQ}\right) \\
&= \frac{8}{11}\left(\frac{1}{4}\vec{RP} + \frac{3}{4}\vec{RQ}\right)
\end{aligned}$$

ですから、辺 PQ を $3:1$ に内分する点を Z としたとき、点 Z は直線 RX 上にあり、
従ってこれこそが求める点 Y であることが分かります。

以上から $PY:YQ = 3:1$ です。

□

2 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の表す一次変換によって方程式 $x^2 + y^2 = z^2$ の整数解

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を移したものである $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ も、また同じ方程式の整数解になっていることを示して下さい。

配点：5 点	シラバス到達目標：力
--------	------------

【解答例】

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

と置くと X, Y, Z は整数であり、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y \\ 5x + 3z \\ 3x + 5z \end{pmatrix}$$

ですから、

$$\begin{aligned}
X^2 + Y^2 - Z^2 &= 16y^2 + (5x + 3z)^2 - (3x + 5z)^2 \\
&= 16y^2 + 16x^2 - 16z^2 \\
&= 16(x^2 + y^2 - z^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となって確かにまた同じ方程式の解になっています。

□

3 点 $(1, 2)$ と直線 $2x + y - 5 = 0$ の距離を求めて下さい。

配点：5 点

シラバス到達目標：イ

【解答例】 点 $(1, 2)$ を中心とし半径 $d > 0$ の円周 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = d^2$ と直線 $y = -2x + 5$ の交点がただ 1 つであることは方程式：

$$(x - 1)^2 + (-2x + 5 - 2)^2 = d^2$$

が重解をもつことと同値です。それは整理して判別式 D により求めることができます。

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (-2x + 5 - 2)^2 &= d^2 \\ 5x^2 - 14x + 10 - d^2 &= 0 \\ 0 &= D \\ &= 14^2 - 4 \cdot 5(10 - d^2) \\ 4 &= 20d^2 \\ d &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

従って求める点と直線の距離は $\frac{1}{\sqrt{5}}$ です。□

4 次の行列・ベクトルの計算を実行して下さい。定義されないものは『定義されない』と答えて下さい。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix}$

(4) ${}^t\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

配点：各 5 点

シラバス到達目標：ア、ウ

【解答例】 (1) 定義されません。

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 + 8 = 6$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

(4)

$${}^t\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -17 \end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| \begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix} \right| \\ - \left| \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix} \right| \\ \left| \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

5 次の行列の逆行列を掃き出し法で求めて下さい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 9 \\ 4 & 13 & 11 \end{pmatrix}$$

配点：10 点 シラバス到達目標：オ

【解答例】

1	3	2	1	0	0	(1)
2	8	9	0	1	0	(2)
4	13	11	0	0	1	(3)
1	3	2	1	0	0	(1)
0	2	5	-2	1	0	(2) - 2(1) = (4)
0	1	3	-4	0	1	(3) - 4(1) = (5)
1	3	2	1	0	0	(1)
0	1	3	-4	0	1	(5)
0	2	5	-2	1	0	(4)
1	0	-7	13	0	-3	(1) - 3(5) = (6)
0	1	3	-4	0	1	(5)
0	0	-1	6	1	-2	(4) - 2(5) = (7)
1	0	-7	13	0	-3	(6)
0	1	3	-4	0	1	(5)
0	0	1	-6	-1	2	-(7) = (8)
1	0	0	-29	-7	11	(6) + 7(8)
0	1	0	14	3	-5	(5) - 3(8)
0	0	1	-6	-1	2	(8)

以上により求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} -29 & -7 & 11 \\ 14 & 3 & -5 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

です。



6 次の行列式の値を求めて下さい。

$$(1) \begin{vmatrix} 13 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 15 & 11 & 5 \\ 6 & 10 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

配点：(1)・(3) 各 5 点、(2)10 点 シラバス到達目標：エ

【解答例】 (1)

$$\begin{vmatrix} 13 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 9(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 15 & 11 & 5 \\ 6 & 10 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & 21 & 5 \\ 30 & 26 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 30 & 21 \\ 30 & 26 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 30 & 21 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -150$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

$$7 \quad \begin{vmatrix} x & 2 & -2 \\ 2 & x & 2 \\ -2 & 2 & x \end{vmatrix} = 0 \text{ となる時の } x \text{ の値をすべて求めて下さい。}$$

配点：10 点 シラバス到達目標：エ

【解答例】

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} x & 2 & -2 \\ 2 & x & 2 \\ -2 & 2 & x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x+2 & 2 & -2 \\ 2+x & x & 2 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} \\ &= (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & x & 2 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} \\ &= (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & x-2 & 4 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} \\ &= (x+2) \begin{vmatrix} x-2 & 4 \\ 2 & x \end{vmatrix} \\ &= (x+2) \begin{vmatrix} x+2 & 4 \\ 2+x & x \end{vmatrix} \\ &= (x+2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & x \end{vmatrix} \\ &= (x+2)^2(x-4) \end{aligned}$$

となりますから、求める x の値は $x = -2, 4$ です。

□