1　２次方程式：$-2x^2+6xy-2y^2=1$ について、以下の問いに答えて下さい：

(1)

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-2x^2+6xy-2y^2$$

となる実数 a、b および c を求めて下さい。

(2) (1) に現れた行列

$$F=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

の固有値・固有ヴェクターを求めて対角化して下さい。

(3) この２次方程式の表す曲線は楕円でしょうか双曲線でしょうか。(2) の結果から予想して下さい（厳密な計算は必要ありません）。

配点：(1)21 点、(2)15 点、(3)4 点	シラバス到達目標：カ、キ、ク

【解答例】　(1) 左辺の行列の積を計算すると

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=ax^2+2bxy+cy^2$$

なので、係数を比較して、$a=-2$、$b=3$、$c=-2$ です。

(2) F の固有方程式は、

$$0=|F-xE|=\begin{vmatrix} -2-x & 3 \\ 3 & -2-x \end{vmatrix}=(x+2)^2-9=x^2+4x-5$$

なので、固有値、つまり固有方程式の解は $1,-5$ です。

<u>固有値 1 について</u>

$$F\mathbb{p}=\mathbb{p}$$

つまり、

$$(F-E)\mathbb{p}=\mathbb{o}$$

となる様なヴェクター $\mathbb{p}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ を求めれば良いので、これを成分で書いて、

$$(F-E)\mathbb{p}=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得ますが、これは１本の式

$$p-q=0$$

と同値ですから、結局、

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}//\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって、求める固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

<u>固有値 -5 について</u>

$$F\mathbb{p}=-5\mathbb{p}$$

つまり、

$$(F+5E)\mathbb{p}=\mathbb{o}$$

となる様なヴェクター $\mathbb{p}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ を求めれば良いので、これを成分で書いて、

$$(F+5E)\mathbb{p}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得ますが、これは 1 本の式

$$p + q = 0$$

と同値であり、結局、

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となって、求める固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ す。

今求めた２つの固有ヴェクターを並べて得られる行列 P：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

によって $P^{-1}FP$ を計算すれば、

$$P^{-1}FP = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

となって F は対角化されます。

(3) 固有値が正のものと負のものが 1 つずつなので、双曲線です。

2 $d \neq 0$ のとき、３次正方行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & d & -d \\ d & 1 & d \\ -d & d & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えて下さい：

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ g \\ 1 \end{pmatrix}$ が M の固有ヴェクターになるような g の値を求めて下さい。

(2) M の固有値を全て求めて下さい。

配点：(1)5 点、(2)5 点	シラバス到達目標：キ

【解答例】　(1)

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ g \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d & -d \\ d & 1 & d \\ -d & d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ g \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + gd - d \\ g + 2d \\ 1 + gd - d \end{pmatrix}$$

なので、これが固有ヴェクターであると仮定すれば、第 1 、3 成分から固有値は $1+gd-d$ でなければならず、従って、第 2 成分によれば、

$$g + 2d = (1 + gd - d)g$$

でなければなりません。

これを g についての方程式として整理すると、

$$dg^2 - dg - 2d = 0$$

ですが、$d \neq 0$ なので

$$0 = g^2 - g - 2 = (g - 2)(g + 1)$$

となり、この条件には d は関与せず、$g = -1, 2$ であることが分かります。

逆に $g=-1$ であれば

$$M\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2d\\-1+2d\\1-2d\end{pmatrix}=(1-2d)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$g=2$ であれば

$$M\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+d\\2+2d\\1+d\end{pmatrix}=(1+d)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

となっており、確かに固有ヴェクターになっています。

以上から答えは $g=-1,2$ です。

(2) M の固有方程式は、

$$\begin{aligned}0=&|M-xE|\\=&\begin{vmatrix}1-x & d & -d\\ d & 1-x & d\\ -d & d & 1-x\end{vmatrix}\\=&(1-x)^3-2d^3-3d^2(1-x)\\=&-x^3+3x^2+(-3+3d^2)x+1-2d^3-3d^2\end{aligned}$$

ですが、まず、(1) により、$1-2d, 1+d$ は M の固有値である事が分かるので、この３次方程式は $(x-1+2d)(x-1-d)=x^2+(-2+d)x-(2d-1)(d+1)$ で割り切れるはずです。

実際に割ってみれば、

$$\begin{aligned}&-x^3+3x^2+(-3+3d^2)x+1-2d^3-3d^2\\=&\{x^2+(-2+d)x-(2d-1)(d+1)\}(-x+1+d)\\=&-(x-1-d)^2(x-1+2d)\end{aligned}$$

となるので、M の固有値は、$1+d, 1-2d$ の２つである事がわかります。

3 ２つのヴェクター $\mathbb{h}_1$、$\mathbb{h}_2$ を並べて得られる行列 $H=(\mathbb{h}_1 \quad \mathbb{h}_2)$ が直交行列である、すなわち ${}^tH=H^{-1}$ を満たす為には $\mathbb{h}_1$、$\mathbb{h}_2$ は直交していなければならない事を示して下さい。

配点：5 点	シラバス到達目標：ア、ウ

【解答例】　${}^tH=H^{-1}$ であると仮定すると、${}^tHH=E$ となるので、

$${}^tH={}^t(\mathbb{h}_1 \quad \mathbb{h}_2)=\begin{pmatrix}{}^t\mathbb{h}_1\\{}^t\mathbb{h}_2\end{pmatrix}$$

に注意すれば、

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}={}^tHH=\begin{pmatrix}{}^t\mathbb{h}_1\\{}^t\mathbb{h}_2\end{pmatrix}(\mathbb{h}_1 \quad \mathbb{h}_2)=\begin{pmatrix}{}^t\mathbb{h}_1\mathbb{h}_1 & {}^t\mathbb{h}_1\mathbb{h}_2\\{}^t\mathbb{h}_2\mathbb{h}_1 & {}^t\mathbb{h}_2\mathbb{h}_2\end{pmatrix}$$

となり、$(1,2)$-成分を見れば ${}^t\mathbb{h}_1\mathbb{h}_2=0$ ですが、

$${}^t\mathbb{h}_1\mathbb{h}_2=\mathbb{h}_1\cdot\mathbb{h}_2$$

でしたので、結局内積が 0、すなわち、直交する事が分かります。

4 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ の逆行列を掃き出し法で求めて下さい。

配点：20 点	シラバス到達目標：オ

【解答例】

1	2	3	1	0	0	(1)
3	4	5	0	1	0	(2)
5	7	8	0	0	1	(3)
1	2	3	1	0	0	(1)
0	-2	-4	-3	1	0	(2)-3(1)=(4)
0	-3	-7	-5	0	1	(3)-5(1)=(5)
1	2	3	1	0	0	(1)
0	-2	-4	-3	1	0	(4)
0	6	14	10	0	-2	-2(5)=(6)
1	0	-1	-2	1	0	(1)+(4)=(7)
0	-2	-4	-3	1	0	(4)
0	0	2	1	3	-2	(6)+3(4)=(8)
2	0	-2	-4	2	0	2(7)=(9)
0	-2	-4	-3	1	0	(4)
0	0	2	1	3	-2	(8)
2	0	0	-3	5	-2	(9)+(8)
0	-2	0	-1	7	-4	(4)+2(8)=(10)
0	0	2	1	3	-2	(8)
2	0	0	-3	5	-2	(9)+(8)
0	2	0	1	-7	4	-(10)
0	0	2	1	3	-2	(8)

以上により、求める逆行列は以下の通り：

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 1 & -7 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

5 ３本の直線 l_1, l_2, l_3 はどの２本も１点のみで交わり、３本が１点で交わってはいないものとします。ある２次正方行列 M の表す１次変換によってこれら３本がそれぞれ不動直線であるとき、この１次変換による不動直線を全て求めて下さい。

配点：5 点	シラバス到達目標：カ

【解答例　その１】　不動直線の方向ヴェクターは M の固有ヴェクターであり、また２次の正方行列 M の相異なる固有値は最大でも２個ですから、l_1, l_2, l_3 の方向ヴェクターのうち少なくとも２本は同じ固有値に対応した固有ヴェクターです。

これは平行でない２本のヴェクターが同じ固有値の固有ヴェクターになっていることを意味し、任意のヴェクターはこの２本の一次結合によって書き表すことが出来ることを考えれば、任意のヴェクターが同一の固有値に関する固有ヴェクターであることが分かります。その固有値を p とすると特に

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$$

ですからこれらを合わせて

$$M = ME = \begin{pmatrix} M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = pE$$

となって行列 M は単位行列の定数倍であることが分かります。

また、３本の不動直線 l_1, l_2, l_3 のうち少なくとも１本は原点を通りませんが、単位行列の p 倍の表す１次変換によって原点と直線の距離は $|p|$ 倍に広がり、更に $p < 0$ の場合は原点対称に移動してしまいますから、原点を通らない直線が不動であるためには $p = 1$、すなわち行列 M は単位行列でなければなりません。

以上から不動直線は任意の直線です。

【解答例　その２】　各直線の交点はまた交点に移らねばならないため、不動点です。従って不動点で同一直線上にないものが３つあります。これはこの一次変換がすべての点を動かさないことを意味し、従って任意の直線が不動直線です。

6 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$ を因数分解して下さい。

配点：15 点	シラバス到達目標：エ

【解答例】

$$\begin{array}{c}\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc}(1) & (2) & (3)\end{array}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{vmatrix} a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ bc & ca-bc & ab-bc \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc}(1) & (2)-(1) & (3)-(1)\end{array}\end{array}$$

$$= (a-b)(c-a)\begin{array}{c}\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ a^2 & -a-b & c+a \\ bc & c & -b \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc}(1) & (4) & (5)\end{array}\end{array}$$

$$= (a-b)(c-a)\begin{array}{c}\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ a^2 & c-b & c+a \\ bc & c-b & -b \end{vmatrix}\begin{array}{c}(6)\\(7)\\(8)\end{array} \\ \begin{array}{ccc}(1) & (4)+(5) & (5)\end{array}\end{array}$$

$$= (a-b)(c-a)\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ a^2-bc & 0 & a+b+c \\ bc & c-b & -b \end{vmatrix}\begin{array}{l}(6)\\(7)-(8)\\(8)\end{array}$$

$$= (a-b)(c-a)(c-b)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2-bc & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$

7 ３つの単位ヴェクター $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ が

$$\mathbb{a}+\mathbb{b}+\mathbb{c}=\mathbb{o}$$

を満たしているとき（右辺はゼロヴェクター）、$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の挟む角度を求めて下さい。

配点：5 点	シラバス到達目標：ア、イ

【解答例　その１】

$$\begin{aligned} \mathbb{a}\cdot(\mathbb{a}+\mathbb{b}+\mathbb{c}) &= 0 \\ 1+\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}+\mathbb{a}\cdot\mathbb{c} &= 0 \quad \cdots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{b}\cdot(\mathbb{a}+\mathbb{b}+\mathbb{c}) &= 0 \\ \mathbb{b}\cdot\mathbb{a}+1+\mathbb{b}\cdot\mathbb{c} &= 0 \quad \cdots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{c}\cdot(\mathbb{a}+\mathbb{b}+\mathbb{c}) &= 0 \\ \mathbb{c}\cdot\mathbb{a}+\mathbb{c}\cdot\mathbb{b}+1 &= 0 \quad \cdots (3) \end{aligned}$$

(2) から (3) を辺々引けば $\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}=\mathbb{a}\cdot\mathbb{c}$ がわかり、これを (1) に代入すれば、求める角度を θ として

$$\cos\theta = |\mathbb{a}||\mathbb{b}|\cos\theta = \mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = -\frac{1}{2}$$

が分かります。従って $\theta=\frac{2\pi}{3}$ です。

【解答例　その２】　原点を始点とした時の $\mathbb{a}$ の終点を A とし、A を始点とした時の $\mathbb{b}$ の終点を B、B を始点とした時の $\mathbb{c}$ を考えればその終点は条件により原点となります。つまり、３点 O, A, B の成す３角形は正三角形です。従って $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の挟む角は $\frac{2}{3}\pi$ です。