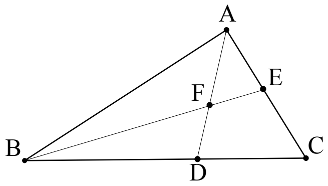
1 (1) 図の三角形 ABC において、$\angle CAB$ の２等分線が辺 BC と交わる点を D とするとき、$\vec{AD}$ を 3 辺の長さと $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。



(2) $\angle ABC$ の２等分線が辺 CA と交わる点を E、直線 AD と交わる点を F とします。

このとき、$\vec{BE}$ が (1) と全く同様に 3 辺の長さと $\vec{BC}, \vec{BA}$ で表せることを利用して（この部分の計算は省略して結果だけ使って頂いて構いません）、$\vec{OF}$ を各辺の長さと $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ で表してください。

配点：10 点	シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】　(1) ２等分されたあとの角を θ とすれば、辺 AD を共通の底辺とした三角形 ABD と三角形 ADC の高さは、それぞれ $AB\sin\theta, AC\sin\theta$ ですから、面積比は $AB : AC$ です。

すると今度は線分 BD, DC をそれぞれの底辺と思えば高さが共通なので、面積比は底辺の長さの比に一致し、

$$BD : DC = AB : AC$$

が分かります。

すると

$$\begin{aligned}\vec{AD} &= \vec{AB} + \vec{BD}\\ &= \vec{AB} + \frac{AB}{AB+AC}\vec{BC}\\ &= \vec{AB} + \frac{AB}{AB+AC}\left(\vec{BA} + \vec{AC}\right)\\ &= \frac{AC}{AB+AC}\vec{AB} + \frac{AB}{AB+AC}\vec{AC}\end{aligned}$$

です。

(2) (1) と全く同様な議論から、$AF : FD = AB : BD$ が分かるので、

$$\begin{aligned}\vec{AF} &= \frac{AB}{AB+BD}\vec{AD}\\ &= \frac{AB}{AB+\frac{AB}{AB+AC}BC}\vec{AD}\\ &= \frac{AB+AC}{AB+AC+BC}\vec{AD}\\ &= \frac{AB+AC}{AB+AC+BC}\left\{\frac{AC}{AB+AC}\vec{AB} + \frac{AB}{AB+AC}\vec{AC}\right\}\\ &= \frac{AC}{AB+AC+BC}\vec{AB} + \frac{AB}{AB+AC+BC}\vec{AC}\\ \vec{AO}+\vec{OF} &= \frac{CA}{AB+BC+CA}\left(\vec{AO}+\vec{OB}\right) + \frac{AB}{AB+BC+CA}\left(\vec{AO}+\vec{OC}\right)\\ \vec{OF} &= \frac{BC\cdot\vec{OA} + CA\cdot\vec{OB} + AB\cdot\vec{OC}}{BC+CA+AB}\end{aligned}$$

です。

(2)[別解] (1) と全く同様にして

$$AE : EC = AB : BC$$

ですから、$\vec{BF} = m\vec{BE}$ とおけば

$$\begin{aligned}\vec{AF} &= \vec{AB} + \vec{BF}\\ &= \vec{AB} + m\vec{BE}\\ &= \vec{AB} + m\left(\vec{BA} + \vec{AE}\right)\\ &= (1-m)\vec{AB} + m\frac{AB}{AB+BC}\vec{AC}\end{aligned}$$

である一方で、$\vec{AF} = n\vec{AD}$ と置けば

$$\vec{AF} = n\frac{CA}{AB+CA}\vec{AB} + n\frac{AB}{AB+CA}\vec{AC}$$

ですから、これらを合わせて

$$\begin{aligned}(1-m)\vec{AB}+m\frac{AB}{AB+BC}\vec{AC}&=n\frac{CA}{AB+CA}\vec{AB}+n\frac{AB}{AB+CA}\vec{AC}\\ \left(1-m-n\frac{CA}{AB+CA}\right)\vec{AB}&=\left(-m\frac{AB}{AB+BC}+n\frac{AB}{AB+CA}\right)\vec{AC}\end{aligned}$$

が得られます。

２つのヴェクター $\vec{AB},\vec{AC}$ は平行ではないのでここから

$$\begin{cases}1-m-n\frac{CA}{AB+CA}=0\\ -m\frac{AB}{AB+BC}+n\frac{AB}{AB+CA}=0\end{cases}$$

が得られ、これを解いて n を求めれば

$$\begin{aligned}-\frac{AB}{AB+BC}+n\frac{AB}{AB+BC}\frac{CA}{AB+CA}+n\frac{AB}{AB+CA}&=0\\ n\left(\frac{CA}{AB+BC}+1\right)\frac{AB}{AB+CA}&=\frac{AB}{AB+BC}\\ n\frac{AB+BC+CA}{AB+BC}\frac{AB}{AB+CA}&=\frac{AB}{AB+BC}\\ n&=\frac{AB+CA}{AB+BC+CA}\end{aligned}$$

が分かりますから、

$$\begin{aligned}\vec{AF}&=n\frac{CA}{AB+CA}\vec{AB}+n\frac{AB}{AB+CA}\vec{AC}\\ &=\frac{CA}{AB+BC+CA}\vec{AB}+\frac{AB}{AB+BC+CA}\vec{AC}\\ \vec{AO}+\vec{OF}&=\frac{CA}{AB+BC+CA}\left(\vec{AO}+\vec{OB}\right)+\frac{AB}{AB+BC+CA}\left(\vec{AO}+\vec{OC}\right)\\ \vec{OF}&=\frac{BC\cdot\vec{OA}+CA\cdot\vec{OB}+AB\cdot\vec{OC}}{BC+CA+AB}\end{aligned}$$

となります。

□

2 次の方程式：

$$X^2 - 8Y^2 = 1$$

の整数解 (X, Y) は、$0 \leq X \leq 100$ かつ $0 \leq Y \leq 100$ の範囲に４組ありますが、一次変換を上手く使う事によって４組全てを求めて下さい。

配点：8 点	シラバス到達目標：カ

【解答例】　自明な整数解 $(1, 0)$ の他に、$(3, 1)$ が解であることもすぐに分かります。そこで点 $(3, -1)$ を点 $(1, 0)$ に、点 $(1, 0)$ を点 $(3, 1)$ に移す一次変換の表現行列を M と置けば、

$$M \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ですから、

$$M \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

です。

このとき

$$M \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$$

であって、

$$17^2 - 8 \cdot 6^2 = 289 - 8 \cdot 36 = 1$$

となっていますからこれも整数解です。更に

$$M \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 35 \end{pmatrix}$$

であって、

$$99^2 - 8 \cdot 35^2 = 9801 - 8 \cdot 1225 = 1$$

となっていますからこれも整数解です。題意により、４組の解は以下の通りです：

$$(1, 0), \quad (3, 1), \quad (17, 6), \quad (99, 35).$$

□

3 (1) 放物線 $y - y_0 = p(x - x_0)^2$ 上の点 (v, w) における接線は

$$(y - y_0) + (w - y_0) = 2p(v - x_0)(x - x_0)$$

であることを示してください。

(2) 放物線 $y - y_0 = p(x - x_0)^2$ 上にない点 (α, β) から放物線に２本の異なる接線が引ける場合、その２接点を結ぶ直線は

$$(y - y_0) + (\beta - y_0) = 2p(\alpha - x_0)(x - x_0)$$

であることを示してください。

(3) (2) の２接点の中点の x-座標は α であることを示してください。

配点：10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】　(1) この直線は $x = v$ のとき $y = w$ となりますから点 (v, w) を通ります。また傾きは $2p(v - x_0)$ ですから傾きも接線の傾きに一致しており、従ってこれは題意の接線です。

(2) ２つの接点を $(v_1, w_1), (v_2, w_2)$ と置けば、それぞれにおける接線の方程式は

$$(y - y_0) + (w_1 - y_0) = 2p(v_1 - x_0)(x - x_0)$$
$$(y - y_0) + (w_2 - y_0) = 2p(v_2 - x_0)(x - x_0)$$

ですから、これらが点 (α, β) を通るので

$$\begin{cases} (\beta - y_0) + (w_1 - y_0) = 2p(v_1 - x_0)(\alpha - x_0) \\ (\beta - y_0) + (w_2 - y_0) = 2p(v_2 - x_0)(\alpha - x_0) \end{cases}$$

が成り立っています。

これは方程式：

$$(\beta - y_0) + (y - y_0) = 2p(x - x_0)(\alpha - x_0)$$

の表す直線上に２点 $(v_1, w_1), (v_2, w_2)$ があることを意味しますから、これが２接点を結ぶ直線であり、題意は示されました。

(3) 今確かめた (2) の直線と放物線の交点の x-座標 v_1, v_2 は２次方程式：

$$2p(\alpha - x_0)(x - x_0) - (\beta - y_0) = p(x - x_0)^2$$

の２解ですが、解と係数の関係により、

$$v_1 - x_0 + v_2 - x_0 = \frac{2p(\alpha - x_0)}{p}$$
$$\frac{v_1 + v_2}{2} = \alpha$$

となって、題意は示されました。　□

4 次のヴェクター・行列の計算をして下さい。ただし、書かれている計算が定義されない場合は『定義されないため計算不可能』と答えて下さい。

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}2 & 4\\-1 & -2\end{pmatrix}^2$　(4) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

配点：各 8 点	シラバス到達目標：ア、ウ

【解答例】　(1)

$$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\end{pmatrix}=(11)\begin{pmatrix}5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}55 & 66\end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}(39)=\begin{pmatrix}39\\78\end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\-1 & -2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2 & 5\\3 & 6\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1 & 4\\3 & 6\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1 & 4\\2 & 5\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

□

5 行列 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 4\\2 & 4 & 7\end{pmatrix}$ について以下の問いに答えて下さい：

(1) 逆行列をヴェクターの外積を使って計算して下さい。

(2) 逆行列を掃き出し法によって計算して下さい。

配点：15 点	シラバス到達目標：ウ、オ

【解答例】　(1) 行列を３本の縦ヴェクターに分解して２本ずつの外積を計算すると、

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3 & 4\\4 & 7\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 7\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 4\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}4 & 1\\7 & 2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}3 & 1\\7 & 2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}3 & 1\\4 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

であり、また３重積は

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}=1$$

ですので、求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

です。

(2) 掃き出し法によって計算すれば

1	2	3	1	0	0	(1)
1	3	4	0	1	0	(2)
2	4	7	0	0	1	(3)
1	2	3	1	0	0	(1)
0	1	1	-1	1	0	$(2)-(1)=(4)$
0	0	1	-2	0	1	$(3)-2(1)=(5)$
1	0	1	3	-2	0	$(1)-2(4)=(6)$
0	1	1	-1	1	0	(4)
0	0	1	-2	0	1	(5)
1	0	0	5	-2	-1	$(6)-(5)$
0	1	0	1	1	-1	$(4)-(5)$
0	0	1	-2	0	1	(5)

となって求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

です。 □

6 次の行列式の値を求めて下さい。

(1) $\begin{vmatrix} a+f & a+g & a+h \\ b+f & b+g & b+h \\ c+f & c+g & c+h \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

配点：(1),(3)10 点、(2)5 点	シラバス到達目標：エ

【解答例】　(1)

$$\begin{vmatrix} a+f & a+g & a+h \\ b+f & b+g & b+h \\ c+f & c+g & c+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f-g & a+g & h-g \\ f-g & b+g & h-g \\ f-g & c+g & h-g \end{vmatrix} = 0$$

(2)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}
&= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ 2(3)=(4) \end{matrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \begin{matrix} (1)-(4) \\ (2) \\ (4) \end{matrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{8}\right) \\
&= -\frac{1}{432}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8-3 = 5$$

□