

1  $\triangle ABC$  の辺  $AB$  の中点を  $M$ 、 $MC$  の中点を  $D$  とし、辺  $BC$  を  $2:1$  に内分する点を  $E$  とします。

(1)  $\vec{AD}$  を  $\vec{AB}, \vec{AC}$  で表してください。

(2) 3 点  $A, D, E$  は 1 直線上にあることを証明して下さい。

配点：(1)5 点、(2)5 点      シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】 (1)

$$\begin{aligned}\vec{AD} &= \vec{AM} + \vec{MD} \\ &= \vec{AM} + \frac{1}{2}\vec{MC} \\ &= \vec{AM} + \frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{AC}) \\ &= \frac{1}{2}\vec{AM} + \frac{1}{2}\vec{AC} \\ &= \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}\end{aligned}$$

(2) 一方、

$$\begin{aligned}\vec{AE} &= \vec{AB} + \vec{BE} \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC} \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{BA} + \vec{AC}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}\end{aligned}$$

なので、ちょうど  $\frac{4}{3}\vec{AD} = \vec{AE}$  となっているため、3 点  $A, D, E$  は同一直線上にある事が分かります。  $\square$

2 2 次正方行列  $A$  および  $Q$  は

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

を満たしていると仮定します。この時  $A$  は固有値  $a, b$  をもつ事を証明して下さい。

配点：5 点      シラバス到達目標：ウ、キ

【解答例 その 1】 固有方程式を計算すれば直ちに分かります：

$$\begin{aligned}|A - xE| &= \left| Q \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} Q^{-1} - xE \right| \\ &= \left| Q \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} Q^{-1} - Q(xE)Q^{-1} \right| \\ &= \left| Q \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} - xE \right\} Q^{-1} \right| \\ &= |Q| \begin{vmatrix} a-x & 0 \\ 0 & b-x \end{vmatrix} |Q^{-1}| \\ &= (a-x)(b-x).\end{aligned}$$

【解答例 その 2】  $Q = \begin{pmatrix} \mathfrak{v} & \mathfrak{w} \end{pmatrix}$  と置けば、 $Q$  は正則行列なので  $\mathfrak{v}, \mathfrak{w} \neq \mathfrak{o}$  です。また、条件式から

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$AQ = Q \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} \mathfrak{v} & \mathfrak{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{v} & \mathfrak{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A\mathfrak{v} & A\mathfrak{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\mathfrak{v} & b\mathfrak{w} \end{pmatrix}$$

となって

$$A\mathfrak{v} = a\mathfrak{v}, \quad A\mathfrak{w} = b\mathfrak{w}$$

が分かるので、確かに  $A$  は固有値  $a, b$  をもちます。  $\square$

3 （実）固有値をもたない 2 次正方行列  $M$  は正則であることを示してください。

配点：5 点

シラバス到達目標：ウ、エ、キ

【解答例】 正則でないと仮定すると、固有方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= |M - xE| = (m_{11} - x)(x_{22} - x) - m_{12}m_{21} \\ &= x^2 - (m_{11} + m_{22})x + m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} \\ &= x(x - \{m_{11} + m_{22}\}) \end{aligned}$$

となって固有値が存在します（0 と  $m_{11} + m_{22}$ ）。

従って、（対偶を取れば）固有値がなければ正則である事が分かります。

□

4 次の行列の逆行列を掃き出し法で求めて下さい：

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

配点：10 点

シラバス到達目標：オ

【解答例】

|   |   |   |   |    |    |              |
|---|---|---|---|----|----|--------------|
| 0 | 2 | 1 | 1 | 0  | 0  | (1)          |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1  | 0  | (2)          |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0  | 1  | (3)          |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0  | 1  | (3)          |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1  | 0  | (2)          |
| 0 | 2 | 1 | 1 | 0  | 0  | (1)          |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0  | 1  | (3)          |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1  | -2 | (2)-2(3)=(4) |
| 0 | 2 | 1 | 1 | 0  | 0  | (1)          |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0  | 1  | (3)          |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1  | -2 | (4)          |
| 0 | 0 | 1 | 1 | -2 | 4  | (1)-2(4)     |

従って求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

です。

□

5 次の行列式を求めてください。ただし (2) は因数分解した形で答えてください。

$$(1) \begin{vmatrix} 7 & 4 & -16 \\ -6 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & a & a^{-1} \\ 1 & b & b^{-1} \\ 1 & c & c^{-1} \end{vmatrix}$$

配点：各 10 点    シラバス到達目標：エ

【解答例】 (1) 問題 7 の問題文によれば行列式の値は  $-3$  です。

あるいは、計算すれば

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & -16 \\ -6 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 31 & 0 & -64 \\ -6 & 1 & 12 \\ 14 & 0 & -29 \end{vmatrix} = 31(-29) - 14(-64) = -3$$

です。

(2)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & a^{-1} \\ 1 & b & b^{-1} \\ 1 & c & c^{-1} \end{vmatrix} &= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a-b & a^2-b^2 & 0 \\ b & b^2 & 1 \\ c-b & c^2-b^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{-1}{abc} \{(a-b)(c-b)(c+b) - (a-b)(a+b)(c-b)\} \\ &= -\frac{1}{abc} (a-b)(c-b)(c-a) \\ &= \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \end{aligned}$$

□

$$6 \text{ 行列 } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ の固有値を求めて下さい。}$$

配点：15 点    シラバス到達目標：キ

【解答例】 この行列の固有方程式を計算すると

$$\begin{aligned} 0 &= |A - zE| \\ &= \begin{vmatrix} 5-z & 2 & 0 \\ 1 & 4-z & 2 \\ 1 & 3 & 3-z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 7-z & 2 & 0 \\ 7-z & 4-z & 2 \\ 7-z & 3 & 3-z \end{vmatrix} \\ &= (7-z) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4-z & 2 \\ 1 & 3 & 3-z \end{vmatrix} \\ &= (7-z) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-z & 2 \\ 1 & 1 & 3-z \end{vmatrix} \\ &= (7-z) \begin{vmatrix} 2-z & 2 \\ 1 & 3-z \end{vmatrix} \\ &= (7-z) \{(2-z)(3-z) - 2\} \\ &= (7-z)(z^2 - 5z + 4) \\ &= (7-z)(z-1)(z-4) \end{aligned}$$

となるのでその解すなわち固有値は 1, 4, 7 です。

□

7 行列  $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -16 \\ -6 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$  の固有値が  $-1, 1, 3$  であることは既知として、それぞれの固有値に対応した固有ベクトルを求めてください。

配点：15 点 | シラバス到達目標：キ

【解答例】 [ 固有値  $-1$  について ] 求める固有ベクトルは  $(B + E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  を満たす  $\mathbf{x}$  ですから、連立方程式

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ -6 & 2 & 12 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めれば良いことになります。

左辺の係数行列は正則ではないので 3 本ある方程式も実質 2 本です。そこで、第 2、3 式を使って  $z$  は諦めてしまえば、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -12z \\ 4z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -12z \\ 4z \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12z \\ 4z \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -32z \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、求める固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

です。

[ 固有値 1 について ] 求める固有ベクトルは  $(B - E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  を満たす  $\mathbf{x}$  ですから、連立方程式

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & -16 \\ -6 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めれば良く、係数行列が正則でないことに注意すれば 3 本ある方程式も実質 2 本なので、第 2、3 式を使って  $z$  は諦めてしまえば、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -12z \\ 6z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -12z \\ 6z \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12z \\ 6z \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -24z \\ -12z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2z \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、求める固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

です。

[ 固有値 3 について ] 求める固有ベクトルは  $(B - 3E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  を満たす  $\mathbf{x}$  ですから、連立方程式

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -16 \\ -6 & -2 & 12 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めれば良く、左辺の係数行列が正則でないことから 3 本ある方程式も実質 2 本ということになります。そこで、第 2、3 式を使って  $z$  は諦めてしまえば、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -12z \\ 8z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -12z \\ 8z \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12z \\ 8z \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -8z \\ -24z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z \\ 3z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、求める固有ベクトルは

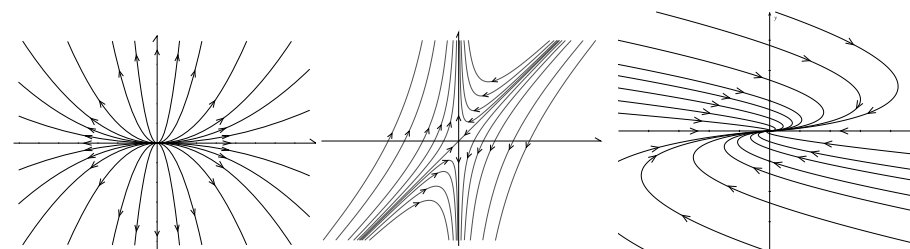
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

です。

8 行列  $C = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{7}{2} \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$  について以下の問いに教えてください。

(1)  $C$  の固有値・固有ベクトルを求めてください。

(2)  $C$  の表す 1 次変換によって平面内の点がどの様に動くか、上の (1) の結果と講義で学んだ知識から予想されることを、他の行列の場合の例（下図）を参考に示して図示してください。



(3) 次の漸化式・初期条件を満たす数列  $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n$  を求めてください。

$$\begin{cases} 2a_{n+1} = 15a_n - 7b_n \\ b_{n+1} = 7a_n - 3b_n \end{cases}, \quad a_0 = 2, b_0 = 3$$

配点：(1)10 点、(2)5 点、(3)5 点 シラバス到達目標：カ、キ、ク

【解答例】 (1)

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{15}{2} - x & -\frac{7}{2} \\ 7 & -3 - x \end{vmatrix} = (x + 3) \left( x - \frac{15}{2} \right) + \frac{49}{2} = x^2 - \frac{9}{2}x + 2 = (x - 4) \left( x - \frac{1}{2} \right)$$

によれば固有値は  $4, \frac{1}{2}$  です。

対応した固有ベクトルを求めると、まず固有値 4 に関しては

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ 7 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

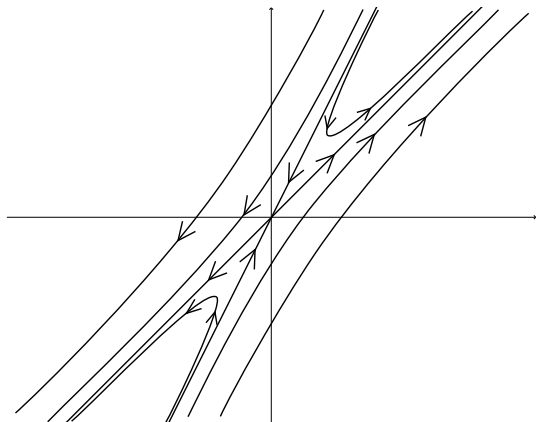
から  $x = y$  が分かりますから求める固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  です。

次に固有値  $\frac{1}{2}$  に関しては、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -\frac{7}{2} \\ 7 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

から  $y = 2x$  がわかりますから、求める固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  です。

(2) (1) の結果から、直線  $y = x$  上の点はこの直線上を無限遠方へ遠ざかるように移動し、また直線  $y = 2x$  上の点はこの直線上を原点に向かって移動します。そのほかの部分は図のように動くと思われ：



(3) 漸化式は

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{7}{2} \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

と書けるので、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = C^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

です。ここで初期値は

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と分解されますから

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = C^n \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = 4^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が得られ、求める数列の一般項は

$$a_n = 4^n + 2^{-n}, \quad b_n = 4^n + 2^{-n+1}$$

です。

あるいは、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

と置けば

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

と対角化できるので、

$$C^n = P \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

となって、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n \\ \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4^n + 2^{-n} \\ 4^n + 2^{-n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られます。

□