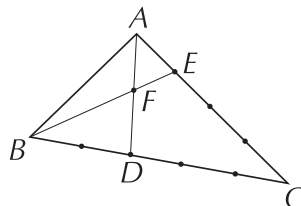


1 $\triangle ABC$ において次の問いに答えて下さい：

(1) 辺 BC を 2:3 に内分する点を D とした時、ベクトル $\vec{AD}$ をベクトル $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。

(2) 辺 CA を 3:1 に内分する点を E とし、線分 BE と線分 AD の交点を F とします。この時点 F の位置ベクトル $\vec{OF}$ を 3 頂点の位置ベクトル $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ で表して下さい。



配点：(1)10 点、(2)10 点

シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】 (1)

$$\begin{aligned}\vec{AD} &= \vec{AB} + \vec{BD} \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{BC} \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{5}(\vec{BA} + \vec{AC}) \\ &= \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC}\end{aligned}$$

ここで 5点

計算ミス -3点

(2) ベクトル $\vec{AF}$ はベクトル $\vec{AD}$ の定数倍ですから、仮に $\vec{AF} = m\vec{AD}$ とおけば、(1) の結果から

$$\vec{AF} = \frac{3m}{5}\vec{AB} + \frac{2m}{5}\vec{AC} \quad \dots (*)$$

少しのみ 3点

である事が分かります。また、ベクトル $\vec{BF}$ はベクトル $\vec{BE}$ のやはり定数倍ですので、 $\vec{BF} = n\vec{BE}$ とおいて此れを変形すれば

$$\begin{aligned}\vec{BF} &= n\vec{BE} \\ \vec{BA} + \vec{AF} &= n(\vec{BA} + \vec{AE}) \\ \vec{AF} &= (1-n)\vec{AB} + n\vec{AE} \\ &= (1-n)\vec{AB} + \frac{n}{4}\vec{AC} \quad \dots (**)\end{aligned}$$

です。

計算ミス -5点
重大なミス -7点

従って、(*) と (**) 式によれば

$$\begin{aligned}\frac{3m}{5}\vec{AB} + \frac{2m}{5}\vec{AC} &= (1-n)\vec{AB} + \frac{n}{4}\vec{AC} \\ \left(\frac{3m}{5} + n - 1\right)\vec{AB} &= \left(-\frac{2m}{5} + \frac{n}{4}\right)\vec{AC}\end{aligned}$$

となるのですが、 $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ は平行ではなく、両辺の係数は 0 である事、即ち連立方程式：

$$\begin{cases} \frac{3}{5}m + n = 1 \\ -\frac{2}{5}m + \frac{1}{4}n = 0 \end{cases}$$

が得られます。

第 2 式の 4 倍を第 1 式から引けば

$$\frac{11}{5}m = 1 \quad \text{すなわち、} \quad m = \frac{5}{11}$$

となってこれを (＊) に戻してやれば

$$\begin{aligned} \vec{AF} &= \frac{3}{11}\vec{AB} + \frac{2}{11}\vec{AC} \\ \vec{AO} + \vec{OF} &= \frac{3}{11}(\vec{AO} + \vec{OB}) + \frac{2}{11}(\vec{AO} + \vec{OC}) \\ \vec{OF} &= \frac{6}{11}\vec{OA} + \frac{3}{11}\vec{OB} + \frac{2}{11}\vec{OC} \end{aligned}$$

である事が分かります。

□

2 (1) ピタゴラス方程式 $x^2 + y^2 = z^2$ が $z \neq 0$ のとき $\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1$ と変形できることと、よく知られた整数解 $(x, y, z) = (3, 4, 5)$ を利用して、原点中心半径 1 の円周上の有理点 (成分が有理数であるような点) で自明な 4 点 $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ 以外のものを 1 つ求めて下さい。

(2) あなたが (1) で求めた単位円周上の有理点は $0 < \alpha < 2\pi$ であるようなある角度 α を使って $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ と書くことが出来て、この角度 α の回転行列：

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

は全ての成分が有理数になっています。そこで、この回転行列による 1 次変換を利用して、ピタゴラス方程式の正の整数解を $(3, 4, 5)$ の他に 2 組求めて下さい。

配点：(1)3 点、(2)3 点	シラバス到達目標：力
------------------	------------

【解答例】 (1)

この式があれば 1～2 点

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

なので、例えば $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ がそうです。

(2) $\cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}$ ですから、この角 α の回転行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

です。

点 $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ をこの一次変換で動かすと

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9 - 16 \\ 12 + 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 \\ 24 \end{pmatrix}$$

2 次の回転行列でやっていけば 1～2 点

が得られ、点 $(-\frac{7}{25}, \frac{24}{25})$ も単位円周上にあることが分かります。従って、

$$\begin{aligned} \left(-\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2 &= 1 \\ 7^2 + 24^2 &= 25^2 \end{aligned}$$

が得られます。

全く同様に、さらに点 $(-\frac{7}{25}, \frac{24}{25})$ を回転すれば

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{25} \\ \frac{24}{25} \end{pmatrix} = \frac{1}{125} \begin{pmatrix} -21-96 \\ -28+72 \end{pmatrix} = \frac{1}{125} \begin{pmatrix} -117 \\ 44 \end{pmatrix}$$

が得られ、点 $(-\frac{117}{125}, \frac{44}{125})$ も単位円周上にあることが分かります。従って、

$$\begin{aligned} \left(-\frac{117}{125}\right)^2 + \left(\frac{44}{125}\right)^2 &= 1 \\ 117^2 + 44^2 &= 125^2 \end{aligned}$$

が得られます。

以上から 2 組の解が得られました：

$$(7, 24, 25), \quad (117, 44, 125)$$

計算ミス -5点

ミスが多いもの -8点

ケアレスミス -2点

□

3 次の行列の逆行列をはきだし法で求めて下さい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

配点：15 点

シラバス到達目標：オ

【解答例】

1	3	2	1	0	0	(1)
0	-2	1	0	1	0	(2)
2	1	4	0	0	1	(3)
1	3	2	1	0	0	(1)
0	-2	1	0	1	0	(2)
0	-5	0	-2	0	1	(3)-2(1)=(4)
2	6	4	2	0	0	2(1)=(5)
0	-2	1	0	1	0	(2)
0	-10	0	-4	0	2	2(4)=(6)
2	0	7	2	3	0	(5)+3(2)=(7)
0	-2	1	0	1	0	(2)
0	0	-5	-4	-5	2	(6)-5(2)=(8)
10	0	35	10	15	0	5(7)=(9)
0	-10	5	0	5	0	5(2)=(10)
0	0	-5	-4	-5	2	(8)
10	0	0	-18	-20	14	(9)+7(8)=(11)
0	-10	0	-4	0	2	5(2)=(10)+(8)=(12)
0	0	-5	-4	-5	2	(8)
5	0	0	-9	-10	7	$\frac{1}{2}$ (11)
0	5	0	2	0	-1	$-\frac{1}{2}$ (12)
0	0	5	4	5	-2	-(8)

従って逆行列は

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -9 & -10 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

です。

外積等で求めているもの

正しい答え 10点

間違っているもの 5点

□

4 次の計算を実行して下さい。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (4) {}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

配点：各 6 点 シラバス到達目標：ウ

【解答例】 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 11 & 29 \\ -5 & 2 & 6 \\ 7 & 21 & 59 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(4)

$${}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 + 9 = 11$$

それぞれについて：

計算ミス	-2点
型が違うもの	-4点
ケアレスミス	-1点
定義が間違っているもの	-3点

5 次の行列式を計算して下さい。ただし (3) は因数分解した形で答えて下さい。

$$(1) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 12 & 3 & 0 \\ -8 & 7 & 6 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$$

配点：各 5 点

シラバス到達目標：エ

【解答例】 (1)

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 12 & 3 & 0 \\ -8 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 12 & 3 & 0 \\ -16 & 5 & 0 \end{vmatrix} \\ = 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ -16 & 5 \end{vmatrix} \\ = 3(60 + 48) = 324$$

計算ミス -2点
重大ミス -4点

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(3)

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+2 & 1 & 1 \\ m+2 & m & 1 \\ m+2 & 1 & m \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} m+2 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} \\ = (m+2)(m-1)^2$$

因数分解して
いないもの -3点

計算ミス -3点
ミスが多いもの -4点

少しのみ 2~3点

6 次の行列の固有値を求めて下さい。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

配点：各 10 点

シラバス到達目標：キ

【解答例】 (1) 問題の行列を M として、 M の固有方程式は、

$$0 = |M - xE|$$

$$= \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 2 \\ -1 & 5-x & -1 \\ 2 & -1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= (2-x)(5-x)(2-x) + 2 + 2 - (2-x) - (2-x) - 4(5-x) \\ = (5-x)(x^2 - 4x + 4) + 6x - 20 \\ = -x^3 + 9x^2 - 18x \\ = -x(x^2 - 9x + 18) \\ = -x(x-3)(x-6)$$

計算ミス -3点
重大ミス -6点
ケアレスミス -2点

となるので、その解、即ち固有値は、0, 3, 6 です。

(2) 固有方程式は

$$0 = \begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & -3-x \end{vmatrix} = (x-1)(x+3) - 6 = x^2 + 2x - 9 = (x+1)^2 - 10$$

ですから、その実数解すなわち固有値は $-1 \pm \sqrt{10}$ です。

計算ミス -3点
重大ミス -6点
ケアレスミス -2点