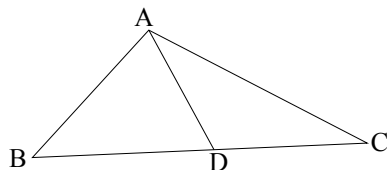


1 $\triangle ABC$ の辺 BC 上に点 D があって、 $\triangle ABD, \triangle ADC$ の面積の比は

$$\triangle ABD : \triangle ADC = 6 : 5$$

です。このとき $\vec{AD}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。



配点：15 点 シラバス到達目標：ア、イ

解答例： 三角形 $\triangle ABD, \triangle ADC$ の底辺をそれぞれ BD, DC と考えれば、2つの三角形の高さは同じなので、面積比は底辺の比となり、

$$BD : DC = 6 : 5$$

が分かります。

この部分の説明がないもの、
または不十分なものは -3点

計算ミス -5点
ミスが多いもの -10点

すると、

$$\begin{aligned}\vec{AD} &= \vec{AB} + \vec{BD} \\ &= \vec{AB} + \frac{6}{11} \vec{BC} \\ &= \vec{AB} + \frac{6}{11} (\vec{BA} + \vec{AC}) \\ &= \frac{5}{11} \vec{AB} + \frac{6}{11} \vec{AC}\end{aligned}$$

が得られます。

□

2 行列 $M = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えてください。

(1) 双曲線 $h : x^2 - 8y^2 = 1$ 上の点は、 M の表す 1 次変換によってまた同じ双曲線 h 上の点に移ることを示して下さい。

(2) 直線 l 上のすべての点が、 M の表す 1 次変換によって同じ直線 l 上の点に移るような直線 l を 1 本求めて下さい。

配点：(1)6 点、(2)4 点 シラバス到達目標：カ

解答例： (1) この 1 次変換による点 (x, y) の移り先を (X, Y) とすると、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 8y \\ x + 3y \end{pmatrix}$$

特殊な点についてのみ
示したものは 4点

少しの計算のみ 1～2点

ですが、

$$\begin{aligned}X^2 - 8Y^2 &= (3x + 8y)^2 - 8(x + 3y)^2 \\ &= 9x^2 + 48xy + 64y^2 - 8x^2 - 48xy - 72y^2 \\ &= x^2 - 8y^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

が成り立っていますから、移り先 (X, Y) も同じ双曲線の上にあることが分かります。

(2) この双曲線の漸近線は 2 直線 $x = \pm 2\sqrt{2}y$ ですが、例えば $x = 2\sqrt{2}y$ 上の点 $(2\sqrt{2}y, y)$ の移り先は

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} + 8 \\ 2\sqrt{2} + 3 \end{pmatrix} = (2\sqrt{2} + 3)y \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となっていて、全て同じ直線 $x = 2\sqrt{2}y$ 上にあることが分かります。従ってこの直線が答えです。

□

3 次の行列の逆行列をはきだし法で求めて下さい。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

配点：10 点

シラバス到達目標：ウ、オ

解答例：

2	3	-2	1	0	0	①
-2	-2	1	0	1	0	②
4	-1	6	0	0	1	③
2	3	-2	1	0	0	①
0	1	-1	1	1	0	②+①=④
0	-7	10	-2	0	1	③-2①=⑤
2	0	1	-2	-3	0	①-3④=⑥
0	1	-1	1	1	0	④
0	0	3	5	7	1	⑤+7④=⑦
6	0	3	-6	-9	0	3⑥=⑧
0	3	-3	3	3	0	3④=⑨
0	0	3	5	7	1	⑦
6	0	0	-11	-16	-1	⑧-⑦
0	3	0	8	10	1	⑨+⑦
0	0	3	5	7	1	⑦

従って求める逆行列は

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -11 & -16 & -1 \\ 16 & 20 & 2 \\ 10 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

です。

□

4 次の行列式を計算して因数分解した形で答えて下さい。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ (b+c)^2 & (c+a)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

配点：10 点

シラバス到達目標：エ

解答例：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ (b+c)^2 & (c+a)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \\ (b+c)^2 & (c+a)^2 - (b+c)^2 & (a+b)^2 - (b+c)^2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \\ (b+c)^2 & (a+b+2c)(a-b) & (a+2b+c)(a-c) \end{vmatrix}$$
$$= (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & -(a+b) & c+a \\ (b+c)^2 & a+b+2c & -(a+2b+c) \end{vmatrix}$$
$$= (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} -(a+b) & c+a \\ a+b+2c & -(a+2b+c) \end{vmatrix}$$
$$= (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} -(a+b) & c+a \\ 2c & -2b \end{vmatrix}$$
$$= 2(a-b)(c-a) \begin{vmatrix} -(a+b) & c+a \\ c & -b \end{vmatrix}$$
$$= 2(a-b)(c-a) \begin{vmatrix} -(a+b+c) & a+b+c \\ c & -b \end{vmatrix}$$
$$= 2(a-b)(c-a)(a+b+c) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ c & -b \end{vmatrix}$$
$$= 2(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

□

書き写しミス・ケアレスミス -1点
計算ミス（少ない） -3点
計算ミス（多い） -5点

途中のもの
1つも括り出せていない 2〜4点
1つ括り出している 5〜6点
2つ括り出している 7〜8点

計算ミス -2〜-3点
重大な変形ミス -5点

5 次の行列の固有値をすべて求めて下さい。

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

配点：15 点 シラバス到達目標：キ

解答例： 固有方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} -x & -1 & 0 \\ -1 & -x & 0 \\ 0 & 3 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (2-x) \begin{vmatrix} -x & -1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} \\ &= (2-x)(x^2-1) \end{aligned}$$

ですから、その解、すなわち固有値は $x = \pm 1, 2$ です。

計算ミス -5点
重大な変形ミス -8~-10点
ミスが多いもの -8~-10点

計算ミス -5点
重大な変形ミス -8~-10点
ミスが多いもの -8~-10点

6 次の行列は固有値 -3 をもちますが、対応する固有ベクトルを求めて下さい。

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

配点：15 点 シラバス到達目標：キ

解答例： 固有ベクトルを求めるには

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= -3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を満たす x, y, z を求めますが、この係数行列は正則でないため、この連立方程式は3本のうち異なる2本のみをとったものと同値です。そこで第1、3式をとって考えることにして、3変数2式連立なので z をあきらめれば、

$$\begin{cases} x + y = -z \\ x + 2y = -z \end{cases}$$

イコールでないものをイコールとしたもの -2点

であり、これは簡単に解けて、 $y = 0, x = -z$ が分かり、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られ、求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

□

7 2つの数列 $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n$ は次の漸化式・初期条件を満たしているとします。

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 7a_n - 2b_n \end{cases}, \quad a_0 = 1, b_0 = -1$$

(1) 係数行列 $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めて下さい。

(2) 対角化を利用して M^n を求めて下さい。

(3) (2) の結果を利用して数列 $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n$ の一般項を求めて下さい。

配点：(1)10 点、(2)(3)5 点 | シラバス到達目標：キ、ク

解答例： (1) 固有方程式は

$$0 = |M - xE| = \begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 7 & -2-x \end{vmatrix} = (x-3)(x+2) - 14 = x^2 - x - 20 = (x-5)(x+4)$$

ですから固有値は 5, -4 です。

【固有値 5 について】対応した固有ベクトルは

$$M\mathbf{x} = 5\mathbf{x}, \quad \text{すなわち、} (M - 5E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

となるようなゼロでないベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ですが、これは連立方程式：

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 7x - 7y = 0 \end{cases}$$

の解であり、 $x = y \neq 0$ であれば良いので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から、求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

【固有値 -4 について】対応した固有ベクトルは

$$M\mathbf{x} = -4\mathbf{x}, \quad \text{すなわち、} (M + 4E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

となるようなゼロでないベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ですが、これは連立方程式：

$$\begin{cases} 7x + 2y = 0 \\ 7x + 2y = 0 \end{cases}$$

の解であり、 $7x = -2y \neq 0$ であれば良いので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{7}{2}x \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

から、求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ です。

計算ミス -3点
ミスが多いもの -5点
記述のミス -1点

(2) 固有ベクトルを使って

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$$

と置けば、

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 5 & 28 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & -36 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と対角化されます。すると

$$\begin{aligned} M &= P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1} \\ M^n &= P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が分かります。

漸化式は

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

と書け、従って

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

が成り立ちますから、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^{n+1} \\ 2(-4)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5^{n+1} + 4(-4)^n \\ 5^{n+1} - 14(-4)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が分かります。

□

8 2次正方行列 G が固有値 2, 5 をもつとき、 G は正則である事を証明して下さい。

配点：10 点

シラバス到達目標：キ

『正則でない⇔固有値がない』
としているものは 0点

解答例： G が正則でないと仮定すると、

$$|G - 0E| = |G| = 0$$

から G は固有値 0 をもちますが、 G の固有値は 2, 5 であり、固有方程式が 2 次である事を考えるとこれは矛盾です。従って G は正則です。 □

少しの計算のみ 1～2点

計算ミス -2点

少しの記述のみ 2～3点

固有方程式を持ち出して
いるもの 最低5点

少しのミスのみ -3点