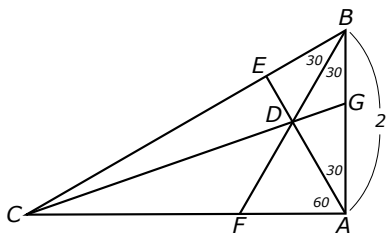


1 図の三角形 $\triangle ABC$ について以下の問いに答えてください。ただし、図の角度は 30 度、60 度を意味しています。



(1) 線分の比が $BE : EC = 1 : 3$, $CF : FA = 2 : 1$ となることを説明してください。

(2) $\vec{OD}$ を、 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ で表してください。ただし、 O はどこかにある原点とします、

配点：(1)5 点、(2)10 点 シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】 (1) $\angle BAC = 90^\circ$ なので、 $BC = 4$ であり、また $\angle BEA = 90^\circ$ ですから、 $BE = 1$ です。従って $BE : EC = 1 : 3$ です。

同様な三角形の辺の長さを考えて、 $CA = 2\sqrt{3}$, $FA = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ですから、 $CF : FA = 2 : 1$ です。

(2) 三角形 $\triangle ADF$ は正三角形、三角形 $\triangle ABD$ は 2 等辺三角形ですから、 $BD = DF$ であることが分かります。従って、

$$\begin{aligned}\vec{OD} &= \vec{OB} + \vec{BD} \\ &= \vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{BF} \\ &= \vec{OB} + \frac{1}{2}\left(\vec{BA} + \vec{AF}\right) \\ &= \vec{OB} + \frac{1}{2}\left(\vec{BO} + \vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{AC}\right) \\ &= \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{6}\left(\vec{AO} + \vec{OC}\right) \\ &= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{6}\vec{OC}\end{aligned}$$

が分かります。

【別解】

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{1}{4}\left(\vec{BA} + \vec{AC}\right) = \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$$

ですので、

$$\vec{AD} = m\vec{AE} = \frac{3m}{4}\vec{AB} + \frac{m}{4}\vec{AC} \cdots (*)$$

と置くことができます。

一方、

$$\vec{BF} = \vec{BA} + \vec{AF} = -\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$$

ですから、

$$\vec{BD} = n\vec{BF} = -n\vec{AB} + \frac{n}{3}\vec{AC}$$

と置くことができます。

すると、

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = (1-n)\vec{AB} + \frac{n}{3}\vec{AC} \cdots (**)$$

です。

(*), (**) を合わせて

$$\begin{aligned} \frac{3m}{4}\vec{AB} + \frac{m}{4}\vec{AC} &= (1-n)\vec{AB} + \frac{n}{3}\vec{AC} \\ \left\{ \frac{3m}{4} + (n-1) \right\} \vec{AB} &= \left(-\frac{m}{4} + \frac{n}{3} \right) \vec{AC} \end{aligned}$$

が成り立ちますが、 $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ は平行ではないため、連立方程式：

$$\begin{cases} \frac{3m}{4} + n - 1 = 0 \\ -\frac{m}{4} + \frac{n}{3} = 0 \end{cases}$$

を得ます。これを解けば $m = \frac{2}{3}$ が分かりますから、(*) に戻して

$$\begin{aligned} \vec{AD} &= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC} \\ \vec{AO} + \vec{OD} &= \frac{1}{2}(\vec{AO} + \vec{OB}) + \frac{1}{6}(\vec{AO} + \vec{OC}) \\ \vec{OD} &= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{6}\vec{OC} \end{aligned}$$

が得られます。

□

2 Pell's 方程式： $x^2 - 7y^2 = 1$ について以下の問いに答えてください。

(1) x, y が共に 10 未満である様な正の整数解が 1 組だけあります。これを求めてください。

(2) 自明な整数解 $(x, y) = (1, 0)$ と上で求めた正の整数解を使って得られる一次変換を利用することによって、もう 1 組の正の整数解を求めてください。

配点：(1)10 点、(2)5 点	シラバス到達目標：カ
-------------------	------------

【解答例】 (1) $(x, y) = (8, 3)$

(2) $(8, -3) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (8, 3)$ と移動させる一次変換の表現行列を M と置けば、

$$M \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を合わせて

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -24 & -63 \\ -9 & -24 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得ます。

この 1 次変換で点 $(8, 3)$ を移せば

$$\begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 127 \\ 48 \end{pmatrix}$$

が得られますが、

$$127^2 - 7 \cdot 48^2 = 16129 - 16128 = 1$$

となって、問題の Pell's 方程式の正の整数解がもう 1 組得られました。

□

3 次の行列の逆行列を (1) ははきだし法で、(2) は余因子もしくはクロス積（外積）を使って求めて下さい。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

配点：各 10 点	シラバス到達目標：ウ、オ
-----------	--------------

【解答例】 (1)

1	2	3	1	0	0	(1)
2	3	4	0	1	0	(2)
5	6	5	0	0	1	(3)
1	2	3	1	0	0	(1)
0	-1	-2	-2	1	0	(2) - 2(1) = (4)
0	-4	-10	-5	0	1	(3) - 5(1) = (5)
1	2	3	1	0	0	(1)
0	1	2	2	-1	0	-(4) = (6)
0	-4	-10	-5	0	1	(5)
1	0	-1	-3	2	0	(1) - 2(6) = (7)
0	1	2	2	-1	0	(6)
0	0	-2	3	-4	1	(5) + 4(6) = (8)
2	0	-2	-6	4	0	2(7) = (9)
0	2	0	4	-2	0	2(6) = (10)
0	0	-2	3	-4	1	(8)
2	0	0	-9	8	-1	(9) - (8) = (11)
0	2	4	10	-10	2	(10) + 2(8) = (12)
0	0	-2	3	-4	1	(8)
2	0	0	-9	8	-1	(11)
0	2	4	10	-10	2	(12)
0	0	2	-3	4	-1	-(8)

従って求める逆行列は $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -9 & 8 & -1 \\ 10 & -10 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ です。

4 次の計算を実行して下さい。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

配点：各 6 点 シラバス到達目標：ウ

(2) この行列を A とし、余因子を A_{ij} で表現します。

$$\begin{aligned} (A_{ij}) &= \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -8 & 17 & 6 \\ 1 & -7 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ですから、

$$|A| = 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-7) + 4(-4) = -13$$

なのでこの行列は正則であって

$$A^{-1} = -\frac{1}{13} {}^t(A_{ij}) = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 \\ -2 & -17 & 7 \\ -3 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

です。

□

【解答例】 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

□

5 次の行列式を計算して下さい。ただし、(2) と (3) は因数分解した形で答えて下さい。

$$(1) \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 11 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 2-m & -1 & 2 \\ -1 & 5-m & -1 \\ 2 & -1 & 2-m \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} s & s^2 & t+u \\ t & t^2 & u+s \\ u & u^2 & s+t \end{vmatrix}$$

配点：各 6 点 シラバス到達目標：エ

【解答例】 (1)

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 9 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

(2) 第 2、3 行を第 1 行に加えると

$$\begin{vmatrix} 2-m & -1 & 2 \\ -1 & 5-m & -1 \\ 2 & -1 & 2-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-m & -1 & 2 \\ 3-m & 5-m & -1 \\ 3-m & -1 & 2-m \end{vmatrix}$$

となり、第 1 行から $3-m$ を括り出せば

$$=(3-m) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5-m & -1 \\ 1 & -1 & 2-m \end{vmatrix}$$

$$=(3-m) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6-m & -3 \\ 0 & 0 & -m \end{vmatrix}$$

$$=-m(m-3)(m-6)$$

と因数分解されます。

(3)

$$\begin{vmatrix} s & s^2 & t+u \\ t & t^2 & u+s \\ u & u^2 & s+t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & s^2 & s+t+u \\ t & t^2 & s+t+u \\ u & u^2 & s+t+u \end{vmatrix}$$

(1) (2) (3) (1) (2) (3)+(1)

$$=(s+t+u) \begin{vmatrix} s & s^2 & 1 \\ t & t^2 & 1 \\ u & u^2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

$$=(s+t+u) \begin{vmatrix} s & s^2 & 1 \\ t-s & t^2-s^2 & 0 \\ u-s & u^2-s^2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (4) \\ (5)-(4) \\ (6)-(4) \end{matrix}$$

$$=(s+t+u)(t-s)(u-s) \begin{vmatrix} s & s^2 & 1 \\ 1 & t+s & 0 \\ 1 & u+s & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(s+t+u)(t-s)(u-s)1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & t+s \\ 1 & u+s \end{vmatrix}$$

$$=(s+t+u)(s-t)(t-u)(u-s)$$

□

6 次の行列の固有値を求めて下さい。

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

配点：各 10 点

シラバス到達目標：キ

【解答例】 (1) この行列の固有方程式を計算すると

$$\begin{aligned} 0 &= |A - zE| \\ &= \begin{vmatrix} 5-z & 2 & 0 \\ 1 & 4-z & 2 \\ 1 & 3 & 3-z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 7-z & 2 & 0 \\ 7-z & 4-z & 2 \\ 7-z & 3 & 3-z \end{vmatrix} \\ &= (7-z) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4-z & 2 \\ 1 & 3 & 3-z \end{vmatrix} \\ &= (7-z) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-z & 2 \\ 1 & 1 & 3-z \end{vmatrix} \\ &= (7-z) \begin{vmatrix} 2-z & 2 \\ 1 & 3-z \end{vmatrix} \\ &= (7-z) \{(2-z)(3-z) - 2\} \\ &= (7-z)(z^2 - 5z + 4) \\ &= (7-z)(z-1)(z-4) \end{aligned}$$

となるのでその解すなわち固有値は 1, 4, 7 です。

(2) まず固有方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - xE \right| \\ &= \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 3 \\ 4 & -3-x & -2 \\ -1 & 2 & 4-x \end{vmatrix} \\ &= (2-x)(3+x)(x-4) + 24 - 3(3+x) + 4(2-x) \\ &= (6-x-x^2)(x-4) + 23 - 7x \\ &= 6x - x^2 - x^3 - 24 + 4x + 4x^2 + 23 - 7x \\ &= -x^3 + 3x^2 + 3x - 1 \\ &= -(x+1)(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

ですから、固有値は $-1, 2 \pm \sqrt{3}$ です。

□