1 $\triangle ABC$ において辺 BC を 2:3 に内分する点を D とした時、$\overrightarrow{AD}$ を $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ で表して下さい。

配点：15 点	シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】

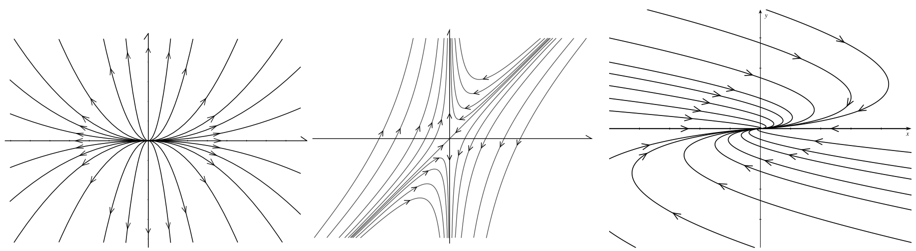
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$$

□

2 行列 $C = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えてください。

(1) C の固有値・固有ヴェクターを求めてください。

(2) C の表す 1 次変換によって平面内の点がどの様に動くか、上の (1) の結果と講義で学んだ知識から予想されることを、他の行列の場合の例（下図）を参考にして図示してください。



配点：(1)(2)15 点	シラバス到達目標：カ、キ

【解答例】 (1) C の固有方程式は

$$0 = \begin{vmatrix} 2-x & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}-x \end{vmatrix} = (2-x)\left(\frac{1}{3}-x\right)$$

ですからその解、すなわち固有値は $2, \frac{1}{3}$ です。

明らかに

$$C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

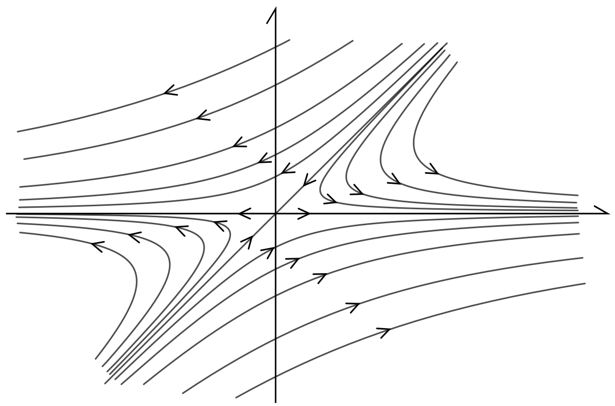
ですから固有値 2 に対応した固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ です。

また、固有値 $\frac{1}{3}$ に対応した固有ヴェクターは連立方程式：

$$\begin{pmatrix} 2-\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

すなわち $x - y = 0$ を解けばよく、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

(2)



□

3 次の行列式を因数分解してください：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

配点：10 点	シラバス到達目標：エ

【解答例】

$$\begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} & = & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} \\ (1)\quad(2)\quad(3) & & (1)\quad(2)-(1)\quad(3)-(1) \end{array}$$

$$= 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y+x & z+x \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)(y-z)(z-x)$$

□

4 行列 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ が直交行列であり、$c<0$ であるとき、a,b,c を求めて下さい。ただし、直交行列とは、${}^tM = M^{-1}$ が成り立つような正方行列のことです。

配点：5 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例　その１】まずヴェクター $\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ が単位ヴェクターであることから、$b=0$ が分かります。

　そうすると今度はヴェクター $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ がヴェクター $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に直交することから $a=0$ が得られ、更に単位ヴェクターであることと $c<0$ であることから $c=-1$ が分かります。

【解答例　その２】

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b^2 & a+bc \\ a+bc & a^2+c^2 \end{pmatrix}$$

ですから、$(1,1)$ 成分から $b=0$ であり、更にこれと $(1,2)$ 成分から $a=0$ が分かります。そして $c<0$ と $(2,2)$ 成分から $c=-1$ です。

□

5 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を掃き出し法によって求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：オ

【解答例】

1	2	3	1	0	0	(1)
2	0	2	0	1	0	(2)
3	2	1	0	0	1	(3)
1	2	3	1	0	0	(1)
0	-4	-4	-2	1	0	$(2)-2(1)=(4)$
0	-4	-8	-3	0	1	$(3)-3(1)=(5)$
1	2	3	1	0	0	(1)
0	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}(4)=(6)$
0	-4	-8	-3	0	1	(5)
1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$(1)-2(6)=(7)$
0	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	(6)
0	0	-4	-1	-1	1	$(5)+4(6)=(8)$
1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	(7)
0	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	(6)
0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}(8)=(9)$
1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$(7)-(9)$
0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$(6)-(9)$
0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	(9)

従って求める逆行列は $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ です。 □

6 次の各行列の固有値・固有ヴェクターを求めて下さい。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

配点：(1)10 点、(2)20 点	シラバス到達目標：キ

【解答例】 (1) 題意の行列を A とすると、A の固有方程式は

$$0=|A-lE|=\begin{vmatrix} -l & 1 & 0 \\ 0 & -l & 1 \\ -4 & 4 & 1-l \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -l^2 & -l & 1 \\ 4(l-1) & 4 & 1-l \end{vmatrix}$$
$$=-1\begin{vmatrix} -l^2 & 1 \\ 4(l-1) & 1-l \end{vmatrix}$$
$$=(l-1)\begin{vmatrix} -l^2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=(l-1)(4-l^2)$$
$$=(l-1)(2-l)(2+l)$$

ですから、結局 A の固有値は $1,\,2,\,-2$ です。

<u>固有値 1 について</u>：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となる様なヴェクター $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 、つまり連立方程式：

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めれば良いことになります。ところが第１式と第３式は同じ式であるので，この連立方程式は本質的には

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ -y+z=0 \end{cases}$$

です。

３つの変数全てを確定値として求める事は出来ないので、仮に y は諦めるとすると、

$$x=y, \quad z=y$$

ですから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が分かり，結局、求める固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

固有値 2 について：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となる様なヴェクター $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 、つまり連立方程式：

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めれば良いことが分かります。

ここで３つの変数を全て確定させる事は出来ないので、y は諦める事にすれば、第１、２式から

$$y=2x, \quad z=2y$$

が分かり，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

が分かるので，求める固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ です。

固有値 -2 について：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となる様なヴェクター $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 、つまり連立方程式：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めれば良いことになります。

３つの変数を全て確定させる事は出来ないので、y を諦める事にすれば、第１、２式から

$$y=-2x, \quad z=-2y$$

が分かり，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}y\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

が分かるので，求める固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ です。

(2) 問題の行列の固有方程式は

$$0=\begin{vmatrix}-1-p & 8\\ -2 & 7-p\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8 & 1+p\\ 7-p & 2\end{vmatrix}=p^2-6p+9=(p-3)^2$$

となるのでこの固有方程式の実数解、すなわち固有値は 3 です。

固有値 3 に関する固有ヴェクターとは、

$$\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

となるヴェクター $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ でしたが、この式を変形すると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}&=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\ \left\{\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -2 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-4 & 8\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となりますから、要するに方程式：

$$x-2y=0$$

を満たす x, y を求めれば良い事が分かります。

x を y で表現すると $x=2y$ なので、

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y\\ y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\ //\ \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

となって，結局求める固有ヴェクターは $\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ である事が分かります。 □

7 次の２次方程式：

$$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2=1$$

の表す曲線について以下の問いに答えて下さい。

(1) まずこの方程式の左辺を

$$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

とした時の行列 $M=\begin{pmatrix}7 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & 13\end{pmatrix}$ の固有値・固有ヴェクターを求めて直交行列によって対角化して下さい。

(2) この結果から問題の曲線がどんな曲線であるか答えて下さい。

配点：(1)10 点、(2)5 点	シラバス到達目標：イ、キ、ク

【解答例】　(1) M の固有方程式は

$$0=|M-xE|=\begin{vmatrix}7-x & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & 13-x\end{vmatrix}=(7-x)(13-x)-27=x^2-20x+64=(x-16)(x-4)$$

ですからその実数解、すなわち固有値は $4, 16$ です。

固有値 4 に対応した固有ヴェクターは、連立方程式：

$$\begin{pmatrix}3 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

すなわち、$x=\sqrt{3}y$ の解であり、$\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$ です。

また、固有値 16 に対応した固有ヴェクターは、連立方程式：

$$\begin{pmatrix}-9 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

すなわち、$y=-\sqrt{3}x$ の解であり、$\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ です。

　これらを単位ヴェクター化して並べた行列を

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

と置けばこれは直交行列であり、角度 $\frac{\pi}{6}$ の回転行列です。
　更に

$$\begin{aligned} MP &= M \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} & M \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} & 16 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 16P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} & P \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となっていますから、

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

となって対角化されます。

(2) 問題の２次方程式は

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と変形されますが、ここで P は直交行列、すなわち、${}^tP = P^{-1}$ でしたから

$$1 = {}^t\left\{ P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり、

$$P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

と置けば、

$$1 = {}^t\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 4X^2 + 16Y^2$$

と変形されます。

　従って問題の方程式が表す曲線は楕円を回転したものですから楕円であると考えられます。 □