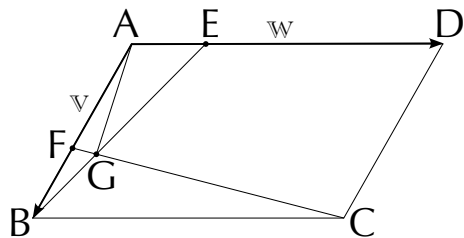


1 図の平行四辺形 ABCD において、 $\vec{AB} = \mathbf{v}$, $\vec{AD} = \mathbf{w}$ とします。

また、線分 AD を 1 : 4 に内分する点を E、線分 AB を 3 : 2 に内分する点を F とし、2 直線 BE と CF の交点を G とします。



(1) $\vec{CF}$ を $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ を使って表してください。

(2) $\vec{BE}$ を $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ を使って表してください。

(3) $\vec{AG}$ を $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ を使って表してください。

配点：(1)7 点、(2)7 点、(3)6 点 | シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】 (1)

$$\vec{CF} = \vec{CB} + \vec{BF} = -\mathbf{w} + \frac{2}{5}\vec{BA} = -\mathbf{w} - \frac{2}{5}\mathbf{v}$$

(2)

$$\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AE} = -\mathbf{v} + \frac{1}{5}\vec{AD} = -\mathbf{v} + \frac{1}{5}\mathbf{w}$$

(3) $\vec{CG} = m\vec{CF}$, $\vec{BG} = n\vec{BE}$ と置けば、

$$\begin{aligned}\vec{CG} &= \vec{CB} + \vec{BG} \\ -\frac{2m}{5}\mathbf{v} - m\mathbf{w} &= -\mathbf{w} - n\mathbf{v} + \frac{n}{5}\mathbf{w} \\ \left(n - \frac{2m}{5}\right)\mathbf{v} &= \left(\frac{n}{5} - 1 + m\right)\mathbf{w}\end{aligned}$$

が得られ、 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ は平行ではないので係数が 0 であること、つまり、

$$\begin{cases} n - \frac{2}{5}m = 0 \\ \frac{1}{5}n + m = 1 \end{cases}$$

が分かります。

これを解けば（第 1 式を第 2 式に代入して）

$$\begin{aligned}\frac{2}{25}m + m &= 1 \\ m &= \frac{25}{27}\end{aligned}$$

ですから、

$$\begin{aligned}\vec{CG} &= \frac{25}{27}\left(-\frac{2}{5}\mathbf{v} - \mathbf{w}\right) \\ &= -\frac{10}{27}\mathbf{v} - \frac{25}{27}\mathbf{w} \\ \vec{AG} &= \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG} \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{w} - \frac{10}{27}\mathbf{v} - \frac{25}{27}\mathbf{w} \\ &= \frac{17}{27}\mathbf{v} + \frac{2}{27}\mathbf{w}\end{aligned}$$

が得られます。

□

2 直線 $ax + by + c = 0$ が単位円 $x^2 + y^2 = 1$ に接する条件を求めてください。

配点：5 点

シラバス到達目標：イ

【解答例】 この直線の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ですから、接点は位置ベクトルが $\pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ である 2 点のどちらかであって、この点が直線上にある条件を書けば

$$\begin{aligned} a \left(\pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) a + b \left(\pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} b \right) + c &= 0 \\ c &= \pm \sqrt{a^2 + b^2} \\ c^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

となります。

【別解】 $a = 0$ のときは、 $b \neq 0$ であり、直線 $y = -\frac{c}{b}$ が接する条件は

$$\left| -\frac{c}{b} \right| = 1, \quad \text{すなわち、} \quad b^2 = c^2$$

です。

$a \neq 0$ のときは、直線の式は $x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$ ですから、これを円周の式に代入して

$$\begin{aligned} \left(-\frac{b}{a}y - \frac{c}{a} \right)^2 + y^2 &= 1 \\ (by + c)^2 + a^2y^2 &= a^2 \\ (a^2 + b^2)y^2 + 2bcy + c^2 - a^2 &= 0 \end{aligned}$$

重解条件を求めれば良く、

$$\begin{aligned} 0 &= b^2c^2 - (a^2 + b^2)(c^2 - a^2) \\ &= a^4 + a^2b^2 - a^2c^2 \\ &= a^2 + b^2 - c^2 \end{aligned}$$

つまり、

$$a^2 + b^2 = c^2$$

となります。これは $a = 0$ のとき $b^2 = c^2$ を意味しますから、結局求める条件は $a = 0$ の場合も $a \neq 0$ の場合もいずれも

$$a^2 + b^2 = c^2$$

です。

□

3 次の行列の逆行列を求めてください。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 37 & -15 \\ -10 & 12 \end{pmatrix}$

配点：(1)10 点、(2)5 点

シラバス到達目標：ウ、オ

【解答例】 (1)

1	3	2	1	0	0	(1)
-1	0	1	0	1	0	(2)
2	3	0	0	0	1	(3)
1	3	2	1	0	0	(1)
0	3	3	1	1	0	(2) + (1) = (4)
0	-3	-4	-2	0	1	(3) - 2(1) = (5)
1	0	-1	0	-1	0	(1) - (4) = (6)
0	3	3	1	1	0	(4)
0	0	-1	-1	1	1	(5) + (4) = (7)
1	0	0	1	-2	-1	(6) - (7) = (8)
0	3	0	-2	4	3	(4) + 3(7) = (9)
0	0	-1	-1	1	1	(7)
1	0	0	1	-2	-1	(8)
0	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}(9)$
0	0	1	1	-1	-1	-(7)

従って求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

です。

(2) $37 \cdot 12 - (-15)(-10) = 294 \neq 0$ ですからこの行列は正則であり、

$$\begin{pmatrix} 37 & -15 \\ -10 & 12 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{294} \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 10 & 37 \end{pmatrix}$$

です。

□

4 次の計算を実行して下さい。ただし定義できないものは『定義されない』と答えてください。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

配点：(1)5 点、(2)5 点、(3)5 点 シラバス到達目標：ウ

【解答例】 (1) 定義されません。クロス積は 3 次元の (たて) ベクトルに対してしか定義されません。

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 1(-1) = 1$$

□

5 次の行列式を計算して下さい。文字の入ったものは因数分解した形で答えてください。

$$(1) \begin{vmatrix} ab & ca & a^2 \\ bc & ab & b^2 \\ ca & bc & c^2 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 5 & -31 & -10 \\ 7 & 13 & -14 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ (b+c)^2 & (c+a)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

配点：(1)10 点、(2)5 点、(3)10 点 シラバス到達目標：エ

【解答例】 (1)

$$\begin{vmatrix} ab & ca & a^2 \\ bc & ab & b^2 \\ ca & bc & c^2 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & b & c \end{vmatrix}$$

$$= abc(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & c & a \\ 1 & a & b \\ 1 & b & c \end{vmatrix}$$

$$= abc(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & c & a \\ 0 & a-c & b-a \\ 0 & b-c & c-a \end{vmatrix}$$

$$= abc(a+b+c) \begin{vmatrix} a-c & b-a \\ b-c & c-a \end{vmatrix}$$

$$= abc(a+b+c) \{-(c-a)^2 - (b-a)(b-c)\}$$

$$= abc(a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)$$

(2)

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 5 & -31 & -10 \\ 7 & 13 & -14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 5 & -31 & 0 \\ 7 & 13 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

6 次の行列の固有値を、それぞれ全て求めて下さい。

$$(1) \begin{pmatrix} 7 & 4 & -16 \\ -6 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 37 & -15 \\ -10 & 12 \end{pmatrix}$$

配点：(1)10 点、(2)10 点

シラバス到達目標：キ

【解答例】 (1) この行列を M とすると固有方程式は

$$0 = |M - xE|$$

$$= \begin{vmatrix} 7-x & 4 & -16 \\ -6 & 1-x & 12 \\ 2 & 2 & -5-x \end{vmatrix}$$

$$= (7-x)(1-x)(-5-x) + 4 \cdot 12 \cdot 2 + (-16)(-6)2$$

$$- (-16)2(1-x) - 4(-6)(-5-x) - 12 \cdot 2(7-x)$$

$$= -(x+5)(x^2-8x+7) + 24 \cdot 12 - 32(x-1) - 24(x+5) + 24(x-7)$$

$$= -x^3 + 3x^2 + 33x - 35 - 32x + 32$$

$$= -x^3 + 3x^2 + x - 3$$

$$= -(x-1)(x^2-2x-3)$$

$$= -(x-1)(x-3)(x+1)$$

となりますから、その実数解、すなわち固有値は $\pm 1, 3$ です。

(2) 固有方程式は

$$0 = \begin{vmatrix} 37-x & -15 \\ -10 & 12-x \end{vmatrix} = x^2 - 49x + 294 = (x-42)(x-7)$$

ですから、固有値は $7, 42$ です。

(3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ (b+c)^2 & (c+a)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ (b+c)^2 & (c+a)^2-(b+c)^2 & (a+b)^2-(b+c)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \\ (a-b)(a+b+2c) & (a-c)(a+2b+c) \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} -a-b & c+a \\ a+b+2c & -a-2b-c \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} c-b & c+a \\ c-b & -a-2b-c \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a) \begin{vmatrix} -1 & c+a \\ -1 & -a-2b-c \end{vmatrix}$$

$$= 2(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

□

□