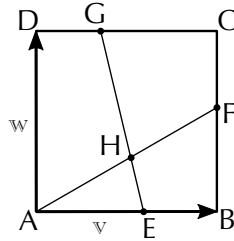


1 図の正方形 ABCD において、 $\vec{AB} = \mathbf{v}$, $\vec{AD} = \mathbf{w}$ とします。

また、線分 AB を 3 : 2 に内分する点を E、線分 BC を 4 : 3 に内分する点を F、線分 CD を 2 : 1 に内分する点を G とし、2 直線 AF と EG の交点を H とします。



- (1) $\vec{AF}$ を $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ を使って表してください。
- (2) $\vec{EG}$ を $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ を使って表してください。
- (3) $\vec{AH}$ を $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ を使って表してください。

配点：(1)5 点、(2)5 点、(3)5 点 シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】 (1)

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \mathbf{v} + \frac{4}{7}\vec{BC} = \mathbf{v} + \frac{4}{7}\mathbf{w}$$

(2)

$$\vec{EG} = \vec{EA} + \vec{AD} + \vec{DG} = \frac{3}{5}\vec{BA} + \mathbf{w} + \frac{1}{3}\vec{DC} = -\frac{4}{15}\mathbf{v} + \mathbf{w}$$

(3) $\vec{AH} = m\vec{AF}$ とおけば、

$$\vec{AH} = m\mathbf{v} + \frac{4m}{7}\mathbf{w}$$

であり、また、 $\vec{EH} = n\vec{EG}$ とおけば

$$\begin{aligned}\vec{EH} &= -\frac{4n}{15}\mathbf{v} + n\mathbf{w} \\ \vec{EA} + \vec{AH} &= -\frac{4n}{15}\mathbf{v} + n\mathbf{w}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{AH} &= \vec{AE} - \frac{4n}{15}\mathbf{v} + n\mathbf{w} \\ &= \frac{3}{5}\mathbf{v} - \frac{4n}{15}\mathbf{v} + n\mathbf{w} \\ &= \frac{9-4n}{15}\mathbf{v} + n\mathbf{w}\end{aligned}$$

でもあります。従って

$$\begin{aligned}m\mathbf{v} + \frac{4m}{7}\mathbf{w} &= \frac{9-4n}{15}\mathbf{v} + n\mathbf{w} \\ \frac{15m+4n-9}{15}\mathbf{v} &= \frac{-4m+7n}{7}\mathbf{w}\end{aligned}$$

が成り立っており、 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ は平行でないため、連立方程式：

$$\begin{cases} 15m + 4n = 9 \\ 4m - 7n = 0 \end{cases}$$

が得られます。

これを解けば

$$\begin{aligned}15 \cdot \frac{7}{4}n + 4n &= 9 \\ 105n + 16n &= 36 \\ 121n &= 36 \\ n &= \frac{36}{121}\end{aligned}$$

が得られますから、

$$\vec{AH} = \frac{9-4n}{15}\mathbf{v} + n\mathbf{w} = \frac{63}{121}\mathbf{v} + \frac{36}{121}\mathbf{w}$$

です。

□

2 Pell's 方程式 $x^2 - 8y^2 = 1$ について、以下の問いに答えて下さい：

(1) $1 \leq x \leq 10, 1 \leq y \leq 10$ の範囲内にこの方程式の整数解が 1 組あります。それを探して下さい。

(2) (1) で求めた解を仮に $(x, y) = (m, n)$ とします。このとき、点 $(m, -n)$ を点 $(1, 0)$ に移し、また点 $(1, 0)$ を点 (m, n) に移す一次変換の表現行列 M を求めて下さい。

(3) 問題の方程式の正の整数解をあと 2 組求めて下さい。

配点：(1)4 点、(2)10 点、(3)6 点

シラバス到達目標：カ

【解答例】 (1) $(x, y) = (3, 1)$

(2)

$$M \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(3)

$$M \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 35 \end{pmatrix}$$

であり、 $(x, y) = (17, 6), (99, 35)$ は

$$17^2 - 8 \cdot 6^2 = 1, \quad 99^2 - 8 \cdot 35^2 = 1$$

となっていますので問題の方程式の正の整数解になっています。 □

3 次の行列の逆行列をはき出し法で求めてください。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

配点：10 点

シラバス到達目標：ウ、オ

【解答例】

1	0	1	1	0	0	(1)
0	1	2	0	1	0	(2)
0	2	3	0	0	1	(3)
1	0	1	1	0	0	(1)
0	1	2	0	1	0	(2)
0	0	-1	0	-2	1	(3) - 2(2) = (4)
1	0	0	1	-2	1	(1) + (4) = (5)
0	1	0	0	-3	2	(2) + 2(4) = (6)
0	0	-1	0	-2	1	(4)
1	0	0	1	-2	1	(5)
0	1	0	0	-3	2	(6)
0	0	1	0	2	-1	-(4)

従って逆行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

です。 □

4 2 次方程式：

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2x^2 + 6xy - 2y^2 = 1$$

について、以下の問いに答えて下さい。

(1) 係数行列 $F = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めて対角化して下さい。

(2) この 2 次方程式の表す曲線は楕円でしょうか双曲線でしょうか。(1) の結果から予想して下さい (厳密な計算は必要ありませんが、そう考える根拠は書いて下さい)。

配点：(1)20 点、(2)5 点 シラバス到達目標：ク

【解答例】 (1) F の固有方程式は、

$$0 = |F - xE| = \begin{vmatrix} -2-x & 3 \\ 3 & -2-x \end{vmatrix} = (x+2)^2 - 9 = x^2 + 4x - 5$$

なので、固有値、つまり固有方程式の解は $1, -5$ です。

固有値 1 について

$$Fp = p$$

つまり、

$$(F - E)p = 0$$

となる様なベクトル $p = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ を求めれば良いので、これを成分で書いて、

$$(F - E)p = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得ますが、これは 1 本の式

$$p - q = 0$$

と同値ですから、結局、

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって、求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

固有値 -5 について

$$Fp = -5p$$

つまり、

$$(F + 5E)p = 0$$

となる様なベクトル $p = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ を求めれば良いので、これを成分で書いて、

$$(F + 5E)p = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得ますが、これは 1 本の式

$$p + q = 0$$

と同値ですから、結局、

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となつて、求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ です。

今求めた 2 つの固有ベクトルを並べて得られる行列 P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

によつて $P^{-1}FP$ を計算すれば、

$$P^{-1}FP = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

となつて F は対角化されます。

(2) 固有値が正のものと負のものが 1 つずつなので、双曲線です。 □

5 次の行列式を計算して下さい。

$$\begin{vmatrix} 19 & 10 & -40 \\ -6 & 5 & 12 \\ 33 & 10 & -69 \end{vmatrix}$$

配点：10 点	シラバス到達目標：エ
---------	------------

【解答例】

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 19 & 10 & -40 \\ -6 & 5 & 12 \\ 33 & 10 & -69 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 31 & 0 & -64 \\ -6 & 5 & 12 \\ 45 & 0 & -93 \end{vmatrix} \\ &= 5(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 31 & -64 \\ 45 & -93 \end{vmatrix} \\ &= 5 \begin{vmatrix} 31 & -2 \\ 45 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &= -15 \end{aligned}$$

□

6 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス到達目標：キ

【解答例】 この行列の固有方程式は $|B - xE| = 0$ ですからこれを計算すると、

$$\begin{aligned} 0 &= |B - xE| \\ &= \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 1 & 1-x & 2 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)\{(1-x)^2 - 1\} \\ &= (1-x)(x^2 - 2x) \\ &= (1-x)x(x-2) \end{aligned}$$

となり、その実数解、即ち固有値は $0, 1, 2$ です。

□

7 行列 $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は固有値 0 をもちます。この固有値に対応した固有ベクトルを求めて下さい。

配点：10 点 シラバス到達目標：キ

【解答例】 固有値 0 に関する固有ベクトル $\mathbf{x}$ は $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ すなわち

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる様なベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ですから、この連立方程式を解けば良いことになります。

係数行列は正則ではないので 3 本ある様に見えて実質的には 2 本の式ですから、第 2、3 式を使って y, z を x で表すと

$$y = -x, \quad z = x$$

ですので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

□