1

$$M=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=M^n\begin{pmatrix}6\\ 0\end{pmatrix}\quad (n=0,1,2,\dots)$$

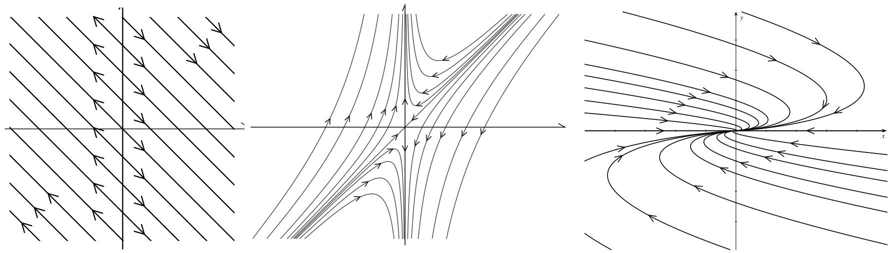
として以下の問いに答えてください（$M^0=E$ とします）。

(1) 行列 M の固有値・固有ヴェクターを求めて下さい。

(2) 行列 M を対角化し、M^n を求めて下さい。

(3) 点 (x_n,y_n) を P_n とするとき点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ は収束するでしょうか？　するかしないか答え、更に収束する場合には極限点も求めて下さい。収束しない場合にはしない理由も述べて下さい。

(4) M の表す 1 次変換によって平面内の点がどの様に動くか、上の結果と講義で学んだ知識から予想されることを、他の行列の場合の例（下図）を参考にして図示してください。



配点：(1)15 点、(2)5 点、(3)2 点、(4)3 点	シラバス到達目標：カ、キ、ク

【解答例】　(1) M の固有方程式は

$$\begin{aligned}0&=\begin{vmatrix}\frac{5}{6}-x & -\frac{1}{6}\\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6}-x\end{vmatrix}\\ &=\frac{1}{36}\{(5-6x)(4-6x)-2\}\\ 0&=36x^2-54x+18\\ &=2x^2-3x+1\\ &=(2x-1)(x-1)\end{aligned}$$

となるため、固有値は $1,\frac{1}{2}$ です。

次に固有ヴェクターを求めます。

固有値 1 について：　$M\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ となるヴェクター $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ を求めれば良いが、これは変形して $(M-E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ ですから連立方程式：

$$\begin{cases}\frac{1}{6}(-x-y)=0\\ \frac{1}{6}(-2x-2y)=0\end{cases}$$

を解けばよく、明らかに $y=-x$ であって

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ -x\end{pmatrix}\,//\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

となり、求める固有ヴェクターは $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ です。

固有値 $\frac{1}{2}$ について：　$M\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ となるヴェクター $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ を求めれば良く、これは変形して $(M-\frac{1}{2}E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ ですから連立方程式：

$$\begin{cases}\frac{1}{6}(2x-y)=0\\ \frac{1}{6}(-2x+y)=0\end{cases}$$

を解きます。明らかに $y=2x$ ですから

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ 2x\end{pmatrix}\,//\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

となって求める固有ヴェクターは $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ です。

(2) 固有ヴェクターを並べて得られる行列を P とすると：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

これは正則であり、

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

です。このとき、

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となって M は対角化されます。

また、この最後の式から

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ですので

$$\begin{aligned} M &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}P^{-1} \\ M^n &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+\frac{1}{2^n} & -1+\frac{1}{2^n} \\ -2+\frac{2}{2^n} & 1+\frac{2}{2^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となって M^n が求まります。

(3) (2) の結果より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+\frac{1}{2^n} & -1+\frac{1}{2^n} \\ -2+\frac{2}{2^n} & 1+\frac{2}{2^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+\frac{2}{2^n} \\ -4+\frac{4}{2^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる事が分かります。$n \to \infty$ の極限を考えると、各座標は収束しているのでこの点列は収束し、極限点は $(4, -4)$ です。

(4) $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ は固有値 1 に関する固有ヴェクターなので、直線 $y=-x$ 上の点はこの一次変換で動きません。

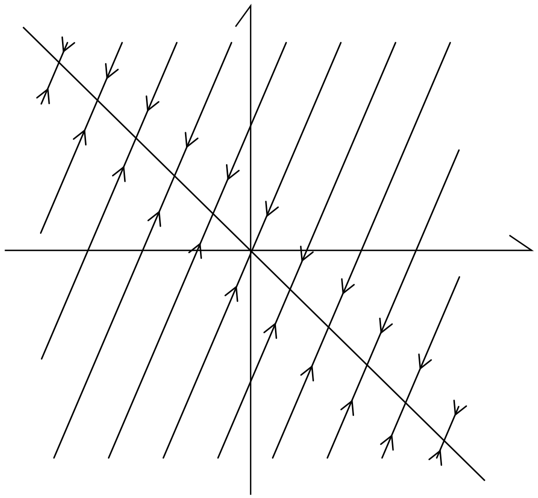
また、方向ヴェクターが $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ である直線上では、直線 $y=-x$ との交点を $(a,-a)$ としてパラメータ表示すれば

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\-a\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=M\begin{pmatrix}a\\-a\end{pmatrix}+tM\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a\\-a\end{pmatrix}+t\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$M^n\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\-a\end{pmatrix}+t\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a\\-a\end{pmatrix}\qquad(n\to\infty)$$

となっており、交点 $(a,-a)$ に向かって動いて行くことがわかります。



□

2 Pell's 方程式 $x^2-3y^2=1$ の正の整数解を 3 組求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：カ

【解答例】 まず $(x,y)=(2,1)$ がすぐに見つかります。そこで

$$(2,-1)\to(1,0)\to(2,1)$$

と順次移してゆく一次変換を考えれば、その表現行列 M は

$$M\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

を満たしますから

$$M\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$$

です。

この M を使って $(2,1)$ を動かすと

$$M\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix},\qquad M\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26\\15\end{pmatrix}$$

が得られ、$(x,y)=(7,4),(26,15)$ はどちらも問題の Pell's 方程式の正の整数解になっています。

$(2,1),(7,4),(26,15)$

□

3 次の行列の逆行列をはき出し法で求めてください。

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

配点：10 点	シラバス到達目標：ウ、オ

【解答例】

2	2	3	1	0	0	(1)
1	−1	2	0	1	0	(2)
3	0	4	0	0	1	(3)
1	−1	2	0	1	0	(2)
2	2	3	1	0	0	(1)
3	0	4	0	0	1	(3)
1	−1	2	0	1	0	(2)
0	4	−1	1	−2	0	$(1)-2(2)=(4)$
0	3	−2	0	−3	1	$(3)-3(2)=(5)$
12	−12	24	0	12	0	$12(2)=(6)$
0	12	−3	3	−6	0	$3(4)=(7)$
0	12	−8	0	−12	4	$4(5)=(8)$
12	0	21	3	6	0	$(6)+(7)=(9)$
0	12	−3	3	−6	0	(7)
0	0	−5	−3	−6	4	$(8)-(7)=(10)$
60	0	105	15	30	0	$5(9)=(11)$
0	60	−15	15	−30	0	$5(7)=(12)$
0	0	5	3	6	−4	$-(10)=(13)$
60	0	0	−48	−96	84	$(11)-21(13)=(14)$
0	60	0	24	−12	−12	$(12)+3(13)=(15)$
0	0	5	3	6	−4	(13)
60	0	0	−48	−96	84	(14)
0	60	0	24	−12	−12	(15)
0	0	60	36	72	−48	$12(13)=(16)$
5	0	0	−4	−8	7	$(14)/12$
0	5	0	2	−1	−1	$(15)/12$
0	0	5	3	6	−4	$(16)/12$

従って逆行列は以下の通り

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -8 & 7 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

□

4 漸化式：

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - b_n \\ b_{n+1} = 6a_n - 2b_n \end{cases}, \quad a_0 = 1,\, b_0 = 1$$

を満たす数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：キ、ク

【解答例】

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり、初項は係数行列 M の固有値 4 に関する固有ヴェクターです。従って

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となりますから、

$$a_n = 4^n, b_n = 4^n$$

です。

【別解】係数行列 M の固有値は

$$0 = \begin{vmatrix} 5-x & -1 \\ 6 & -2-x \end{vmatrix} = (x+2)(x-5)+6 = x^2-3x-4 = (x-4)(x+1)$$

から $-1, 4$ です。

-1 に関する固有ヴェクターは

$$6x - y = 0$$

から $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ であり、4 に関する固有ヴェクターは

$$x - y = 0$$

から $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ と置けば

$$\begin{aligned}
MP &= \left(M\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(-\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(-P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 4P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\
P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\
\left(P^{-1}MP\right)^n &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \\
P^{-1}M^nP &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \\
M^n &= P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

ですので

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4^n \\ 4^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

です。

□

5 次の行列式を計算して下さい。(2) は因数分解してください。

(1) $\begin{vmatrix} 12 & 11 & 5 \\ 6 & 10 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

配点：(1)10 点、(2)10 点	シラバス到達目標：エ

【解答例】　(1)

$$\begin{vmatrix} 12 & 11 & 5 \\ 6 & 10 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27 & 21 & 5 \\ 30 & 26 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 27 & 21 \\ 30 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & 27 \\ 26 & 30 \end{vmatrix} = -72$$

(2)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & b^2-a^2 & (c+a)^2-(b+c)^2 \\ 0 & c^2-a^2 & (a+b)^2-(b+c)^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (b-a)(b+a) & (a-b)(a+b)+2c(a-b) \\ (c-a)(c+a) & (a-c)(a+c)+2b(a-c) \end{vmatrix} \\
&= (a-b)(c-a)\begin{vmatrix} -(b+a) & a+b+2c \\ c+a & -a-c-2b \end{vmatrix} \\
&= (a-b)(c-a)\begin{vmatrix} -(b+a) & 2c \\ c+a & -2b \end{vmatrix} \\
&= 2(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)
\end{aligned}$$

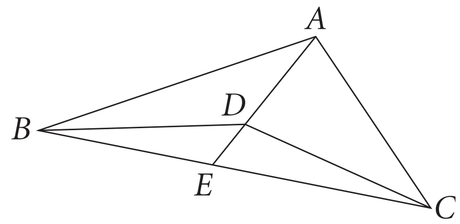
□

6 $\triangle ABC$ の内部に点 D があって、

$$3\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$$

が成り立っているとします。

　このとき直線 AD と辺 BC の交点 E は辺 BC をどんな比で内分するでしょうか。BE : EC を答えて下さい。



配点：10 点	シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】　$\overrightarrow{DE}$ は $\overrightarrow{AD}$ の（正の）定数倍ですから、$\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{AD}$ と置きます。与式によれば

$$\begin{aligned}
3\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{0} \\
\overrightarrow{AD} &= \frac{2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}}{3} \\
\overrightarrow{DE} &= k\frac{2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}}{3}
\end{aligned}$$

となりますが、辺 BC を $1:2$ に内分する点を F とした場合、最後の項 $\dfrac{2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}}{3}$ は明らかに $\overrightarrow{DF}$ です。

　E, F 共に辺 BC 上にあってヴェクター $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}$ が平行ですからこれは $E = F$ を意味します。

　従って点 E は辺 BC を $1:2$ に内分し、$BE : EC = 1:2$ となります。

【別解】講義で学んだ面積比による三角形内部の点の位置ヴェクターの定理により、

$$\triangle DBC : \triangle DCA : \triangle DAB = 3 : 2 : 1$$

であり、特に

$$\triangle DCA : \triangle DAB = 2 : 1$$

ですから、同様に

$$\triangle DBE : \triangle DEC = 1 : 2$$

が分かり、これらは高さが共通の三角形なので面積比は底辺の比となり、$BE : EC = 1 : 2$ です。 □

7 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えてください。

(1) A の固有値を全て求めてください。

(2) A の最大の固有値について固有ヴェクターを求めて下さい。

配点：(1)10 点、(2)5 点	シラバス到達目標：キ

【解答例】 (1) この行列の固有方程式を計算すると

$$\begin{aligned} 0 =& |A - zE| \\ =& \begin{vmatrix} 5-z & 2 & 0 \\ 1 & 4-z & 2 \\ 1 & 3 & 3-z \end{vmatrix} \\ =& \begin{vmatrix} 7-z & 2 & 0 \\ 7-z & 4-z & 2 \\ 7-z & 3 & 3-z \end{vmatrix} \\ =& (7-z) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4-z & 2 \\ 1 & 3 & 3-z \end{vmatrix} \\ =& (7-z) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-z & 2 \\ 1 & 1 & 3-z \end{vmatrix} \\ =& (7-z) \begin{vmatrix} 2-z & 2 \\ 1 & 3-z \end{vmatrix} \\ =& (7-z)\{(2-z)(3-z)-2\} \\ =& (7-z)(z^2-5z+4) \\ =& (7-z)(z-1)(z-4) \end{aligned}$$

となるのでその解すなわち固有値は $1, 4, 7$ です。

(2) 行列の成分を見ると、どの横の列も全て足すと 7 になっているため、ヴェクター $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ は固有値 7 に関する固有ヴェクターであると考えられます。実際

$$\begin{pmatrix}5&2&0\\1&4&2\\1&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

です。

【別解】固有値 7 に関する固有ヴェクターを求めます。

$$\begin{cases}-2x+2y=0\\x-3y+2z=0\\x+3y-4z=0\end{cases}$$

第１式から $x=y$ が分かるので、これを他の式に代入して

$$\begin{cases}-2y+2z=0\\4y-4z=0\end{cases}$$

となり、結局 $x=y=z$ が得られます。従って固有ヴェクターは $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ です。

□