

2次曲線と直線の幾何学

1 円の接線

1.1 円と直線の接する条件

問題 1.1 円 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ と直線 $ax + by + c = 0$ が接するための条件を求めて下さい。

直線の方程式をちょっとだけ変形して

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + ax_0 + by_0 + c = 0$$

ここから $-a(x - x_0) = b(y - y_0) + ax_0 + by_0 + c$ を円の方程式を変形して得られる $a^2(x - x_0)^2 + a^2(y - y_0)^2 = a^2r^2$ に代入すると ($a \neq 0$ とします。 $a = 0$ の場合は $b \neq 0$ なのでそっちでやれば同様です)、

$$\begin{aligned} & \{b(y - y_0) + ax_0 + by_0 + c\}^2 + a^2(y - y_0)^2 = a^2r^2 \\ & (a^2 + b^2)(y - y_0)^2 + 2b(ax_0 + by_0 + c)(y - y_0) + (ax_0 + by_0 + c)^2 - a^2r^2 = 0 \end{aligned}$$

となりますが、この2次方程式が重解であるための条件は判別式が0である事ですから

$$\begin{aligned} & b^2(ax_0 + by_0 + c)^2 - (a^2 + b^2)\{(ax_0 + by_0 + c)^2 - a^2r^2\} = 0 \\ & (a^2 + b^2)r^2 = (ax_0 + by_0 + c)^2 \end{aligned}$$

が得られます。 □

事実 1.2 円 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ と直線 $ax + by + c = 0$ が接するための条件：

$$(a^2 + b^2)r^2 = (ax_0 + by_0 + c)^2.$$

1.2 円の接線

円周 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ 上の2点 $(x_0 \pm r, y_0)$ 以外の付近では、ローカルに y は x の(微分可能な)関数になっていますから、微分すれば

$$2(x - x_0) + 2(y - y_0)y' = 0 \quad \text{従って} \quad y' = -\frac{x - x_0}{y - y_0}$$

が成り立っています。従って円周上の点 (α, β) における円の接線は、

$$y - \beta = -\frac{\alpha - x_0}{\beta - y_0}(x - \alpha) \quad \text{すなわち} \quad (\alpha - x_0)(x - \alpha) + (\beta - y_0)(y - \beta) = 0$$

ですが、点 (α, β) が円周上にある条件：

$$(\alpha - x_0)^2 + (\beta - y_0)^2 = r^2$$

と辺々加えれば

$$(\alpha - x_0)(x - x_0) + (\beta - y_0)(y - y_0) = r^2$$

とも書けることが分かります。そしてこの形であれば、先に除外した特別な2点における自明な接線も表現できており、任意の点における接線の表現が得られました。他の2次曲線も同様です。

事実 1.3 [2次曲線の接線]

(o) 円 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ 上の点 (α, β) における接線：

$$(\alpha - x_0)(x - x_0) + (\beta - y_0)(y - y_0) = r^2.$$

(i) 楕円 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ 上の点 (α, β) における接線：

$$\frac{(\alpha - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(\beta - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1.$$

(ii) 放物線 $y - y_0 = p(x - x_0)^2$ 上の点 (α, β) における接線：

$$\frac{(y - y_0) + (\beta - y_0)}{2} = p(\alpha - x_0)(x - x_0).$$

(iii) 双曲線 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ 上の点 (α, β) における接線：

$$\frac{(\alpha - x_0)(x - x_0)}{a^2} - \frac{(\beta - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1.$$

1.3 有理形パラメータ

点 $(-1, 0)$ を通り傾きが t の直線 $y = t(x + 1)$ と単位円周との交点を求めると、

$$\begin{aligned}x^2 + t^2(x + 1)^2 &= 1 \\(1 + t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 &= 0 \\x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, -1\end{aligned}$$

により、交点は $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ です。従って、単位円周から1点 $(-1, 0)$ を除いた部分は次のパラメータ表示をもちます：

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2} \quad -\infty < t < \infty$$

今回は $(-1, 0)$ を除きましたが、任意の点で可能であることは言うまでもありません。

事実 1.4 [2 次曲線の有理型パラメータ]

(o) 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ から1点 $(-1, 0)$ を除いたもの：

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2} \quad -\infty < t < \infty$$

(i) 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ から1点 $(-a, 0)$ を除いたもの：

$$x = \frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2bt}{1 + t^2} \quad -\infty < t < \infty$$

(ii) 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ から1点 $(-a, 0)$ を除いたもの：

$$x = \frac{a(1 + t^2)}{1 - t^2}, \quad y = \frac{2bt}{1 - t^2} \quad t \neq \pm 1$$

2 J.-V. Poncelet の閉形定理

2.1 やってみよう

まずは別紙 (i ページ) を見て下さい。右に放物線と円が描いてありますが、放物線上の勝手な点から円に向かって接線を引きます。接点を通り過ぎてそのまま接線を延ば

して行くと再び放物線と交わりますね (接線がある程度寝ていないと紙から出てしまいますので最初の点の取り方を工夫して下さい)。

次にその再び交わった点からもう一度、別の接線を内部の円に向かって引いて下さい。さっきと同じ様に接点を通り過ぎてまたしても再び放物線と交わる点に到着します。

次に、これが最後のステップですが、またしてもそこから内部の円に向かってもう1つの接線を引いてみて下さい。どうですか、元の点に戻って来ませんか？

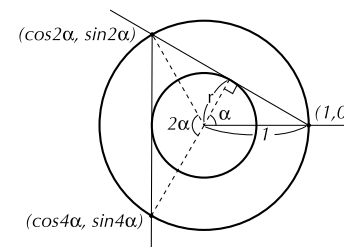
きちんと描けば『どの点からスタートしても』3回で元の点に戻って来ます。本来出発点によって状況は違って然るべきなのに、何故かどこから出発しても同じなんです。

他にも楕円の中に円の入ったものなどがありますので同じ事を試してみてください。外側の図形から出発して、内側の図形に接線を引いて... です。

2.2 どこから出発しても明らかに同じ場合 ～同心円～

一番単純なのがこの同心円の場合です。回転対称ですからどこからスタートしても同じですね。更に簡単のために、外側の円は半径1とし、内部の円の半径を r 、スタートポイントを点 $(1, 0)$ とします。

右の図を見れば分かる通り、一本目の接線を引いて再び外側の円と交わる点の座標は $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$ ですが、この α と云う角は、やはり図を見れば分かる通り $\alpha = \cos^{-1}r$ です。



次の二本目の接線を引くと、再び外側の円と交わる点は $(\cos 4\alpha, \sin 4\alpha)$ であり、この手順を繰り返して行けば、外の円周上に点がプロットされて行きます：

$$(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha), \quad (\cos 4\alpha, \sin 4\alpha), \quad (\cos 6\alpha, \sin 6\alpha), \dots$$

で、いつかスタート地点に帰って来るとするならば、ある自然数 n があって、 $(1, 0) = (\cos 2n\alpha, \sin 2n\alpha)$ となっているはずですね。これはすなわち、ある自然数 m があって $2n\alpha = 2m\pi$ となっている事を意味しますから、結局、 $\alpha = \frac{m}{n}\pi$ でなければなりません。

以上から、小さい方の円の半径が

$$\cos^{-1}r = (\text{有理数}) \times \pi$$

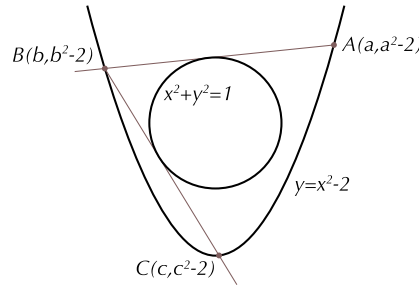
を満たしていなければ何度接線を引いても戻って来ないと云う事が分かります。

2.3 出発点によらない事が自明でない場合 ～放物線と円～

一番最初に皆さんに接線を引いてもらった放物線と円の場合を証明してみます。

別紙にある通り、放物線は $y = x^2 - 2$ であり、円は $x^2 + y^2 = 1$ です。

出発点を $A(a, a^2 - 2)$ 、一本目の接線を引いて再び放物線と交わった点を $B(b, b^2 - 2)$ 、二本目の接線を引いて得られた点を $C(c, c^2 - 2)$ としましょう。あとは直線 CA が円に接する事を示してやれば良いわけです。



2.3.1 直線 AB, BC が円に接すること

直線 AB の方程式は、 $y - (a^2 - 2) = \frac{b^2 - 2 - (a^2 - 2)}{b - a}(x - a)$ ですが、これを整理すると、

$$(b + a)x - y - ab - 2 = 0$$

となります。これが円 $x^2 + y^2 = 1$ と接するわけですから、今日計算した結果を使えば

$$(ab + 2)^2 = (a + b)^2 + 1$$

が直線 AB が円と接する条件です。

直線 BC の方も全く同様にして、と云うか、単に $a \rightarrow b, b \rightarrow c$ と記号を書き換えるだけです。接するための条件は $(bc + 2)^2 = (b + c)^2 + 1$ となります。

2.3.2 直線 CA が円に接すること

全く同様に考えれば、直線 CA が円に接するための条件は $(ca + 2)^2 = (c + a)^2 + 1$ となるはずですから、最終的にはこの式が成り立つ事を示してやれば良いわけです。

さっき考えた直線 AB, BC が円に接すると云う2つの条件式を良く見て下さい(ちょっとだけいじってあります)：

$$\begin{cases} (ab + 2)^2 = (a + b)^2 + 1 \\ (cb + 2)^2 = (c + b)^2 + 1 \end{cases}$$

どうですか？

$$(Xb + 2)^2 = (X + b)^2 + 1$$

と云う X の2次方程式があって、 a と c はその解だと言ってるんです。

この2次方程式は整理すれば

$$(b^2 - 1)X^2 + 2bX + 3 - b^2 = 0$$

ですから、解と係数の関係から

$$a + c = -2\frac{b}{b^2 - 1}, \quad ac = \frac{3 - b^2}{b^2 - 1}$$

である事がわかります。そこで、

$$\begin{aligned} (ca + 2)^2 &= \left(\frac{3 - b^2}{b^2 - 1} + 2\right)^2 = \left(\frac{b^2 + 1}{b^2 - 1}\right)^2 \\ (c + a)^2 + 1 &= \frac{4b^2}{(b^2 - 1)^2} + 1 = \frac{4b^2 + (b^2 - 1)^2}{(b^2 - 1)^2} = \frac{(b^2 + 1)^2}{(b^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

と計算してみると

$$(ca + 2)^2 = (c + a)^2 + 1$$

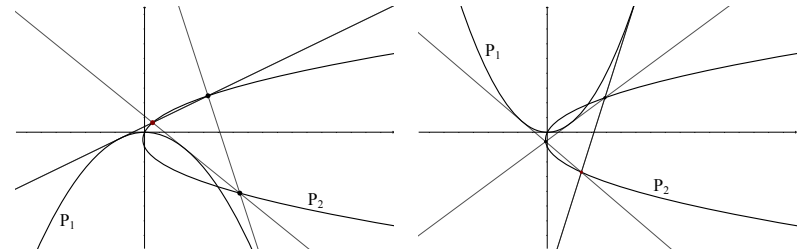
であって、これこそは直線 CA が円 $x^2 + y^2 = 1$ と接する条件に他なりません。以上により、三本目の接線が直線 CA となって元の点 A に帰って来ます。

Exercise

基本演習 1 x_0, y_0 は任意の実数とします。放物線 $y = (x - x_0)^2 + y_0$ 上の点 A から放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に向かって接線を引きます。このときこの接線がもう一度放物線 $y = (x - x_0)^2 + y_0$ と交わった点を B として、今度はこの点 B から放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に接線を引きます。さらにこの接線がもう一度放物線 $y = (x - x_0)^2 + y_0$ と交わった点を C としたときに、直線 CA が放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に接する事を示してください。

基本演習 2 p は0でない任意の実数とします。放物線 $P_2: x = (y + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}$ 上の、放物線 $P_1: y = px^2$ ($p \neq 0$) の外部にある点 A から放物線 P_1 に向かって接線を引き、この接線がまた放物線 P_2 と交わった点を B とします。

次に点 B から放物線 P_1 に接線を引き、また放物線 P_2 と交わった点を C とします。このとき直線 CA が放物線 P_1 に接することを示してください。



基本演習 3 $(2, -4)$ を中心とした半径 2 の円周上の点 A と直線 $3x + 4y - 15 = 0$ 上の点 B の 2 点間の距離が最も短くなる場合の各点 A, B の座標を求めて下さい (点と直線の距離の公式は使わない事)。

基本演習 4 点と直線の距離の式を、出来るだけたくさん、異なった方法で示してください。

基本演習 5 (1) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ が次のように有理関数によってパラメータ表示されることを確認してください (点 $(-1, 0)$ は除きます) :

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad y = \frac{2t}{1-t^2}, \quad t \neq \pm 1$$

(2) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ と円 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ があります。双曲線上の点で円の外部にある点から出発して円に接線を引き、その接線が再び双曲線と交わった点からもう一度別の接線を引き、これを繰り返すと、どこから出発しても 3 回で元の点に戻る事を証明して下さい。

基本演習 6 (1) 一般に、円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ 上の点 (p_1, p_2) に於ける円の接線は、

$$(p_1 - a)(x - a) + (p_2 - b)(y - b) = c^2$$

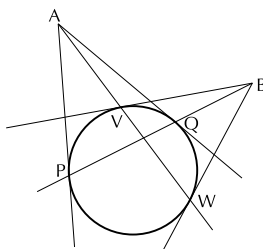
である事を示して下さい。

(2) 円 $x^2 + y^2 = 1$ に外部の点 $A(a_1, a_2)$ から引いた 2 本の接線の接点を $P(p_1, p_2), Q(q_1, q_2)$ とするとき接線 AP および AQ の方程式を求め、これを使って直線 PQ の方程式が $a_1x + a_2y = 1$ となる事を証明して下さい。

(3) 更に直線 PQ 上に円の外部の点 $B(b_1, b_2)$ を取ったとき $a_1b_1 + a_2b_2 = 1$ が成り立つ事を示して下さい。

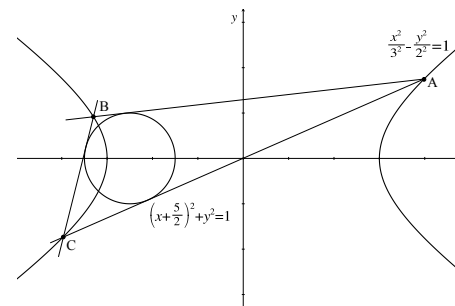
(4) 点 B から円に引いた 2 本の接線の接点を $V(v_1, v_2), W(w_1, w_2)$ として (2) と同様にして直線 VW の方程式を求めて下さい。

(5) 3 点 A, V, W は一直線上にある事を示して下さい。



発展演習 7 双曲線 $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ 上の点 A から円 $(x + \frac{5}{2})^2 + y^2 = 1$ に向かって接線を引き、その接線がもう一度双曲線と交わった点を B とします。今度は点 B から同様に円に接線を引き (さっきとは別の接線にします)、また双曲線と交わった点を C とします。

このとき、点 C から円に引いた接線は点 A を通ることを示して下さい。ただし、点 A は円の外部にあるとします。



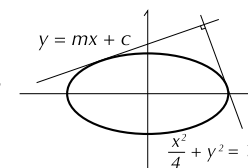
発展演習 8 [1990 京大前期理系に類題] 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の内部に円 $x^2 + y^2 = 1$ があるとします ($a, b > 0$)。楕円周上の任意の点から出発して内部の円に接線を引き、これを繰り返します。3 回接線を書いて元の出発点に戻って来るための a, b の条件を求めて下さい。

発展演習 9 [2002 センター試験に類題] 円周 $(x - \sqrt{3})^2 + y^2 = 9$ 上の点から出発してこの円の内部にある別の円 $x^2 + y^2 = 1$ に接線を引き、これを繰り返します。どの点から出発しても 3 回接線を書いた時にまた出発点に戻って来る事を証明して下さい。

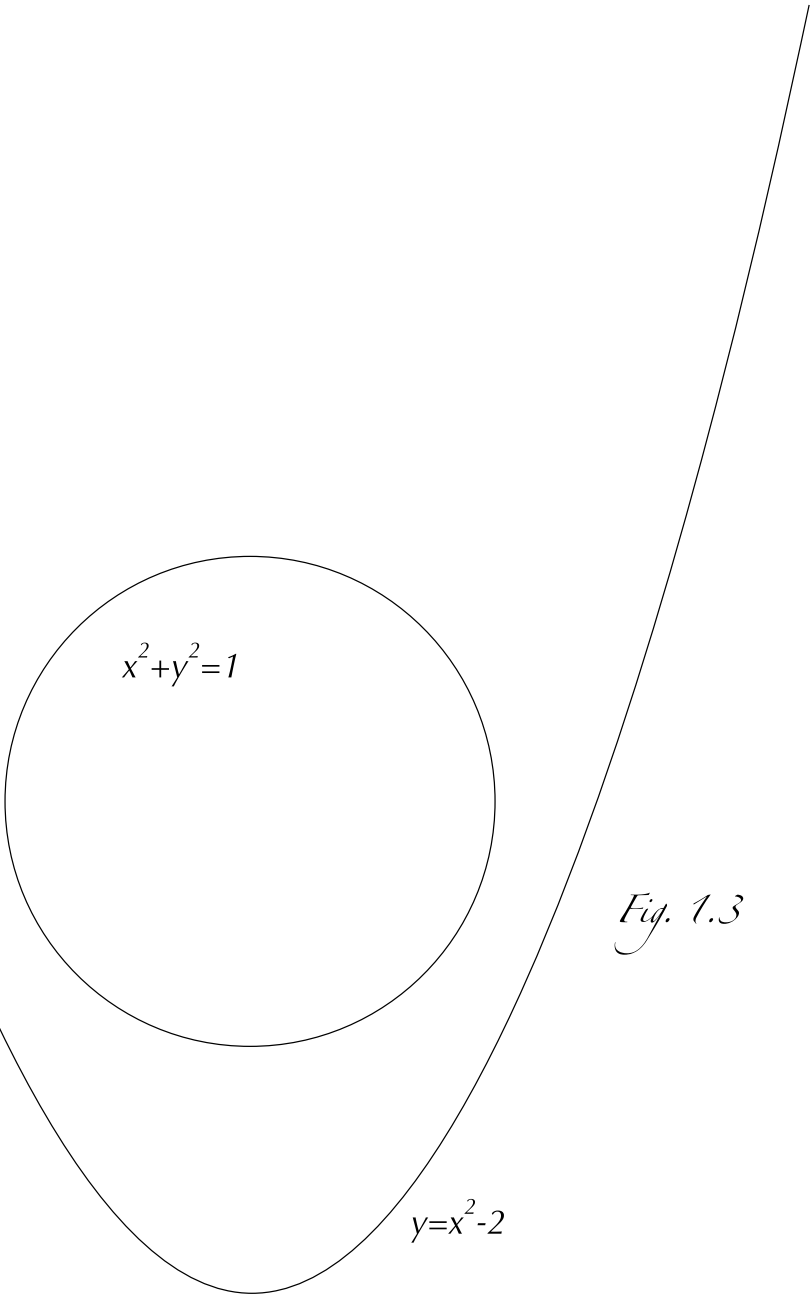
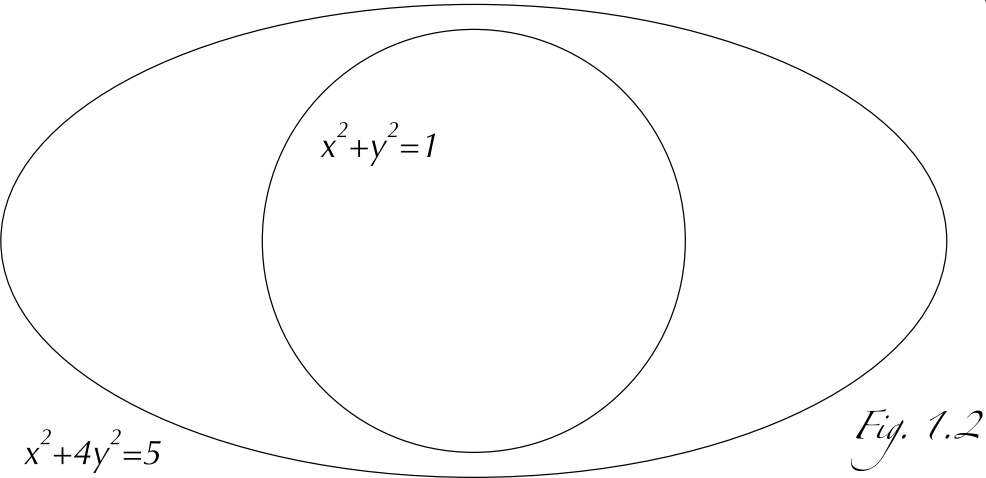
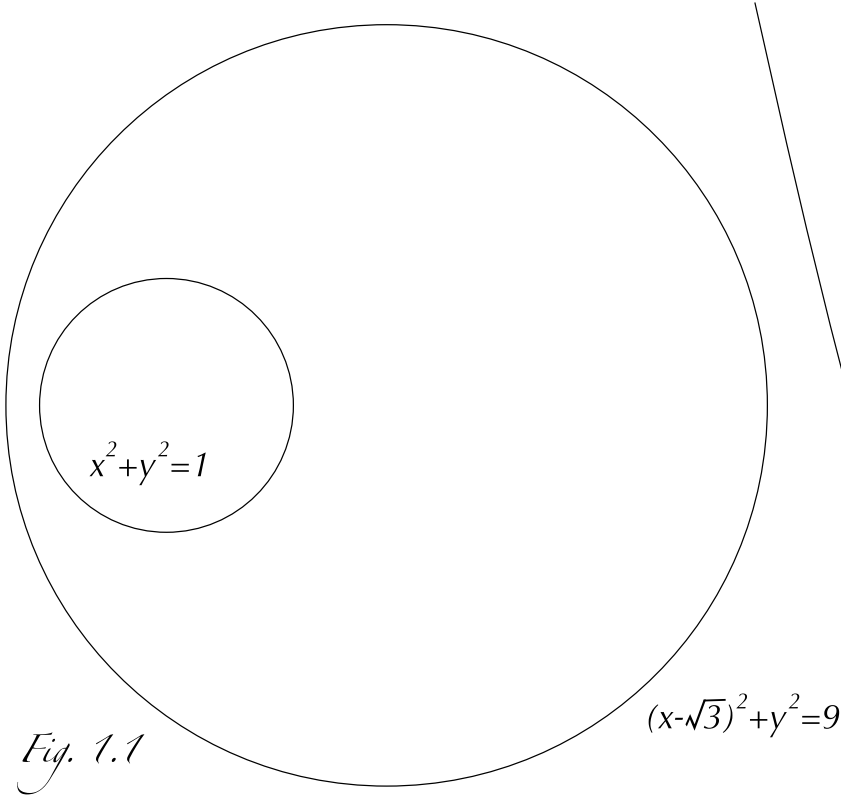
発展演習 10 [1980 東大編入試に類題] 楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ において、

(1) 傾き m の接線 $y = mx + c$ の切片 c を m を使って表して下さい。

(2) 直交する接線の交点の軌跡が円になる事を示して下さい。



発展演習 11 楕円 $x^2 + 4y^2 = 5$ とその内部にある円 $x^2 + y^2 = 1$ を考えます。楕円周上の勝手な点から出発して円に接線を引き、その接線が再び楕円周と交わった点からもう一度別の接線を引き、これを繰り返すと、どこから出発しても 4 回で元の点に戻る事を証明して下さい。



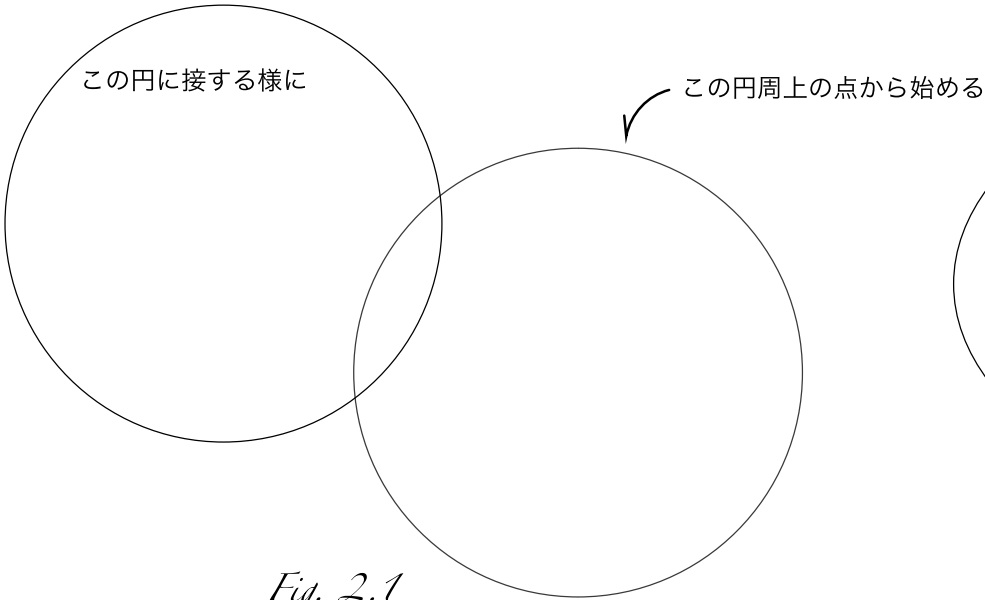
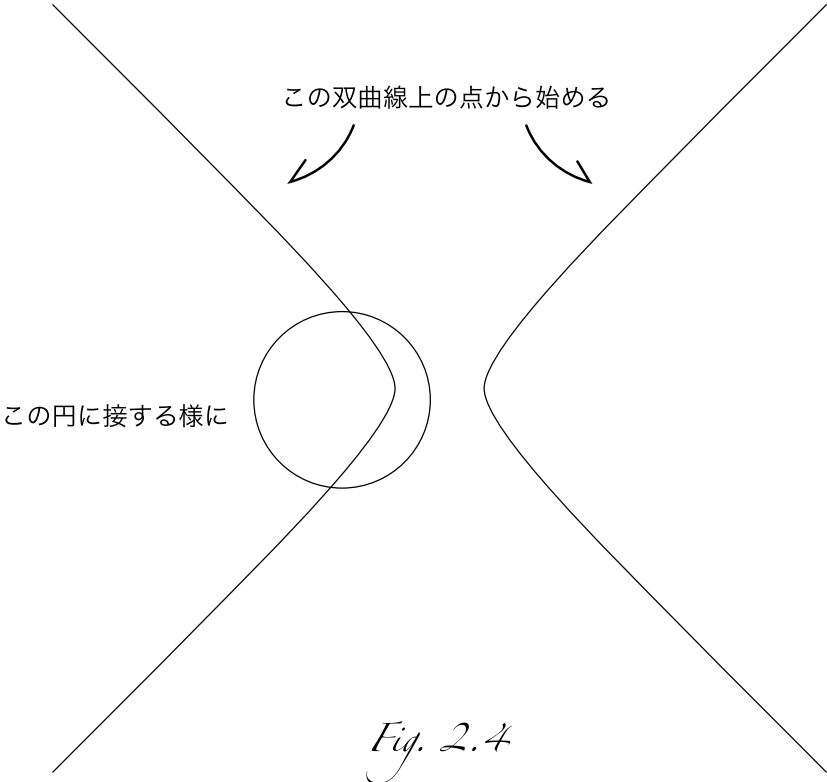
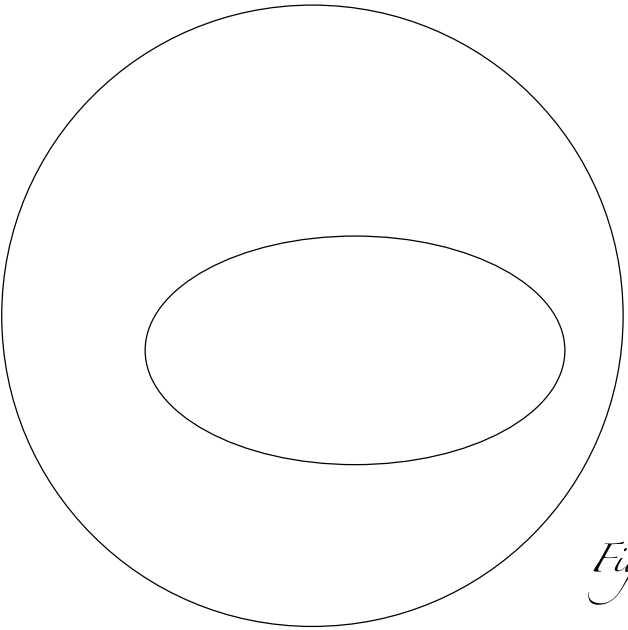
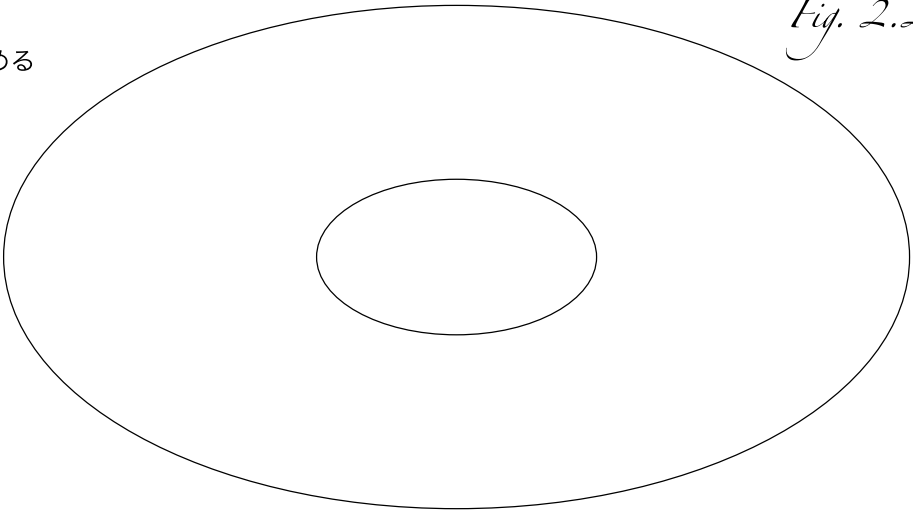
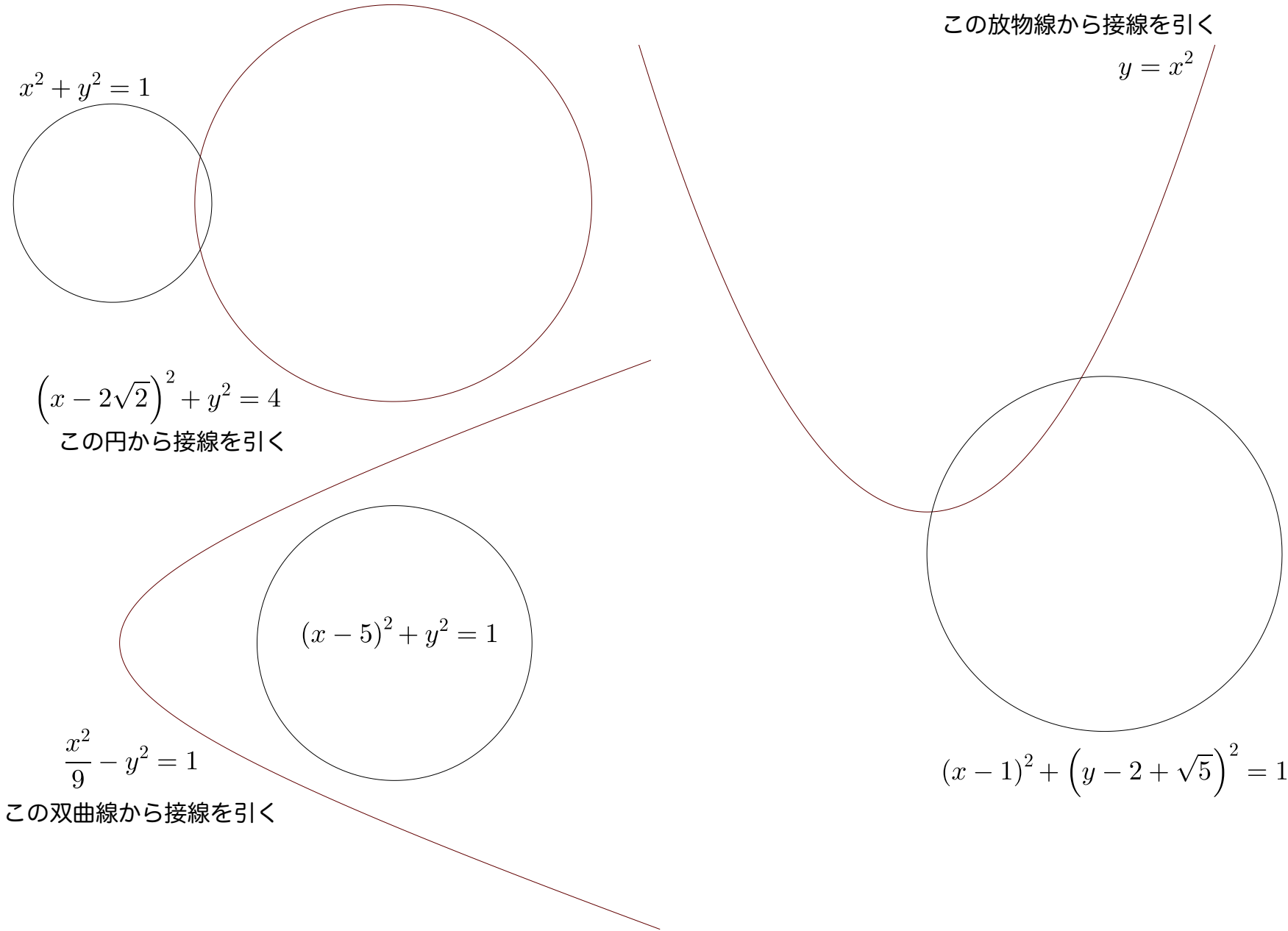
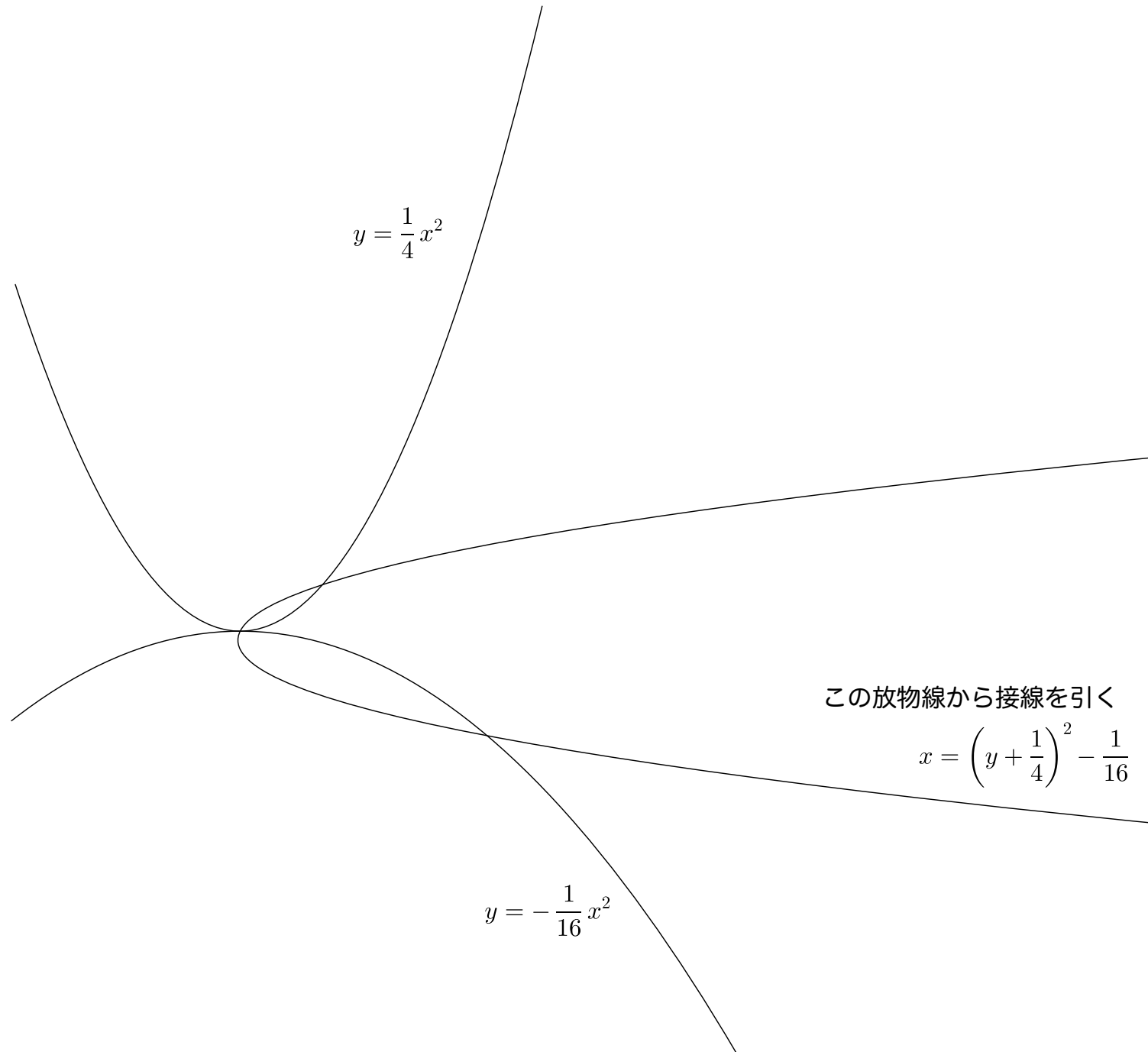


Fig. 2.1







Exercise 解答例

基本演習 1 放物線 $y = (x - x_0)^2 + y_0$ 上の点 A から放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に向かって接線を引き、このときこの接線がもう一度放物線 $y = (x - x_0)^2 + y_0$ と交わった点を B として、今度はこの点 B から放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に接線を引き、さらにこの接線がもう一度放物線 $y = (x - x_0)^2 + y_0$ と交わった点を C としたときに、直線 CA が放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に接する事を示してください。

放物線 $y = (x - x_0)^2 + y_0$ 上の異なる3点 A, B, C を

$$A(a, (a - x_0)^2 + y_0), \quad B(b, (b - x_0)^2 + y_0), \quad C(c, (c - x_0)^2 + y_0)$$

とし、これらの点は全て放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ の外部にあるものと仮定します。

直線 AB の式は

$$\begin{aligned} (a - b)\{y - (a - x_0)^2 - y_0\} &= \{(a - x_0)^2 - (b - x_0)^2\}(x - a) \\ (a - b)\{y - (a - x_0)^2 - y_0\} &= \{a^2 - b^2 - 2(a - b)x_0\}(x - a) \\ y &= (a + b - 2x_0)(x - a) + (a - x_0)^2 + y_0 \\ y &= (a + b - 2x_0)x + x_0^2 + y_0 - ab \end{aligned}$$

ですからこれが放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に接するための条件は

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x^2 &= (a + b - 2x_0)x + x_0^2 + y_0 - ab \\ 0 &= \frac{1}{4}x^2 - (a + b - 2x_0)x - x_0^2 - y_0 + ab \end{aligned}$$

の重解条件となり、それは

$$\begin{aligned} 0 &= (a + b - 2x_0)^2 - (-x_0^2 - y_0 + ab) \\ ab - x_0^2 - y_0 &= (a + b - 2x_0)^2 \end{aligned}$$

となります。

全く同様にして直線 BC が放物線に接する条件は

$$bc - x_0^2 - y_0 = (b + c - 2x_0)^2$$

ですからこれらを合わせて2次方程式：

$$\begin{aligned} bX - x_0^2 - y_0 &= (b + X - 2x_0)^2 \\ 0 &= X^2 + (b - 4x_0)X + (b - 2x_0)^2 + x_0^2 + y_0 \end{aligned}$$

の異なる2解が c, a であることが分かります。

すると解と係数の関係によって

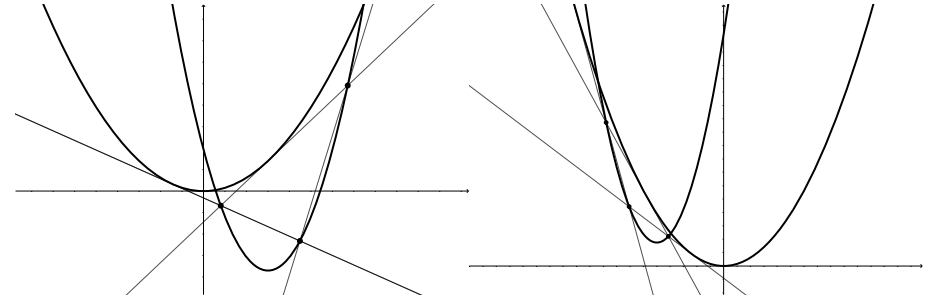
$$c + a = 4x_0 - b, \quad ca = (b - 2x_0)^2 + x_0^2 + y_0$$

であることが分かりますが、このとき

$$\begin{aligned} ca - x_0^2 - y_0 &= (b - 2x_0)^2 \\ &= (4x_0 - b - 2x_0)^2 \\ &= (c + a - 2x_0)^2 \end{aligned}$$

であって、これは直線 CA が放物線に接している事を意味しています。

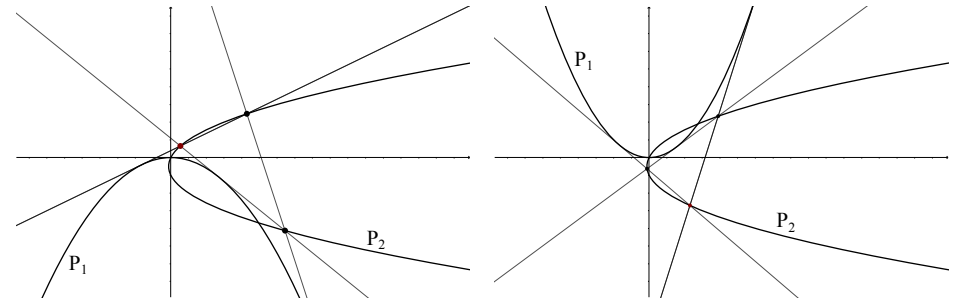
以上により、3回で元に戻って来ることが示されました。□



位置関係が（もちろん交わらないといけませんが）どうであっても3回で戻って来るという結果は衝撃的です。この2つの放物線は特別な間柄にあるようです。

基本演習 2 放物線 $P_2: x = (y + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}$ 上の、放物線 $P_1: y = px^2 (p \neq 0)$ の外部にある点 A から放物線 P_1 に向かって接線を引き、この接線がまた放物線 P_2 と交わった点を B とします。

次に点 B から放物線 P_1 に接線を引き、また放物線 P_2 と交わった点を C とします。このとき直線 CA が放物線 P_1 に接することを示してください。



異なる3点 A, B, C を

$$A\left(\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}, a\right), \quad B\left(\left(b + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}, b\right), \quad C\left(\left(c + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}, c\right)$$

とします。このとき a, b, c は全て異なります。

直線 AB の方程式は

$$\begin{aligned} \left\{ \left(a + \frac{1}{4} \right)^2 - \left(b + \frac{1}{4} \right)^2 \right\} (y - a) &= (a - b) \left\{ x - \left(a + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{16} \right\} \\ (a - b) \left(a + b + \frac{1}{2} \right) (y - a) &= (a - b) \left\{ x - \left(a + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{16} \right\} \\ \left(a + b + \frac{1}{2} \right) (y - a) &= x - \left(a + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{16} \\ \left(a + b + \frac{1}{2} \right) (y - a) + \left(a + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} &= x \\ \left(a + b + \frac{1}{2} \right) y - ab &= x \end{aligned}$$

であり、これが放物線 P_1 に接する条件は

$$\begin{aligned} y &= p \left\{ \left(a + b + \frac{1}{2} \right) y - ab \right\}^2 \\ &= p \left(a + b + \frac{1}{2} \right)^2 y^2 - 2pab \left(a + b + \frac{1}{2} \right) y + pa^2b^2 \\ 0 &= p \left(a + b + \frac{1}{2} \right)^2 y^2 - \left\{ 2pab \left(a + b + \frac{1}{2} \right) + 1 \right\} y + pa^2b^2 \end{aligned}$$

の重解条件であって、判別式により

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{ 2pab \left(a + b + \frac{1}{2} \right) + 1 \right\}^2 - 4p \left(a + b + \frac{1}{2} \right)^2 pa^2b^2 \\ &= 4pab \left(a + b + \frac{1}{2} \right) + 1 \end{aligned}$$

です。

全く同様にして、直線 BC が接する条件は

$$0 = 4pbc \left(b + c + \frac{1}{2} \right) + 1$$

となりますから、これらを合わせれば2次方程式

$$\begin{aligned} 0 &= 4pbX \left(X + b + \frac{1}{2} \right) + 1 \\ &= 4pbX^2 + 2pb(2b + 1)X + 1 \end{aligned}$$

の異なる2解が c, a であることが分かります。

すると解と係数の関係から

$$c + a = -\frac{2pb(2b + 1)}{4pb} = -b - \frac{1}{2}, \quad ca = \frac{1}{4pb}$$

であって、このとき

$$4pca \left(c + a + \frac{1}{2} \right) + 1 = \frac{1}{b}(-b) + 1 = 0$$

となっていますが、これは直線 CA が放物線 P_1 に接する条件そのものですから、以上によって3回で元に戻って来ることが分かりました。□

任意の p で良いというところが凄いですね。軸が平行な場合と対照的です。

基本演習 3 $(2, -4)$ を中心とした半径2の円周上の点 A と直線 $3x + 4y - 15 = 0$ 上の点 B の2点間の距離が最も短くなる場合の各点 A, B の座標を求めて下さい (点と直線の距離の公式は使わない事)。

問題の円と直線は交わりませんから、円の中心 $(2, -4)$ と点 A, B の3点がこの順番に同一直線上にあり、かつこの直線が問題の直線 $3x + 4y - 15 = 0$ と直交している場合に2点 A, B 間の距離が最小になります。

【解答例 その1】 問題の直線の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ですから、円の中心を通して問題の直線に直交する直線 (これを直線 l とします) は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメーター})$$

で表現されます。

この直線 l と問題の直線の交点 (これが点 B です) を求めるにはパラメータ表示 $x = 2 + 3t, y = -4 + 4t$ を直線の式に代入したものを解いて t を求めればよく、実際

$$3(2 + 3t) + 4(-4 + 4t) - 15 = 0 \quad \text{すなわち} \quad 25t - 25 = 0$$

から $t = 1$ となつて、交点は $B(5, 0)$ である事が分かります。

また、直線 l と円周の交点も同様に代入して

$$(3t)^2 + (4t)^2 = 4 \quad \text{すなわち} \quad 25t^2 = 4$$

から $t = \pm \frac{2}{5}$ です。さっき求めた2直線の交点はパラメーター1に対応していましたが今度の円周との2つの交点のうち、求める点は (点の並び順から言って) パラメーターがプラスのもの、すなわち $t = \frac{2}{5}$ に対応するものであり、 $A\left(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ となります。

【解答例 その2】 円の中心を $C(2, -4)$ とすればベクトル $\vec{CA}$ は問題の直線に垂直ですから、この直線の法線ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ に平行です。また長さは2ですから、

$$\vec{CA} = \pm \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち、} \quad \vec{OA} = \vec{OC} + \vec{CA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \pm \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

のどちらかです。しかし図から判断すれば点 A はプラスの方で、従って $A\left(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ となります。

また、問題の直線の方角ベクトルは $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ なので、点 B の座標を $(-\frac{4}{3}y + 5, y)$ と置けば、ベクトル $\vec{CB}$ がこの方向ベクトルと直交すると云う事から

$$0 = \vec{CB} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}y + 5 - 2 \\ y + 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{16}{3}y - 12 + 3y + 12$$

となって $y = 0$ が得られ、 $B(5, 0)$ である事が分かりました。

【解答例 その3】 円の中心を通り問題の直線に直交する直線は方向ベクトルが $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ですから、法線ベクトルは $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ になる筈です。従ってその方程式は

$$-4(x - 2) + 3(y + 4) = 0 \quad \text{すなわち、} \quad -4x + 3y + 20 = 0$$

となります。まず2直線の交点を求めると、連立方程式を解けばよく、

$$\begin{cases} 3x + 4y - 15 = 0 \\ -4x + 3y + 20 = 0 \end{cases}$$

において、第1式の4倍と第2式の3倍を辺々足せば $25y = 0$ すなわち $y = 0$ が得られます。これを第1式に戻せば $x = 5$ が分かりますから交点 B は $B(5, 0)$ となります。

また、円周との交点はやはり連立方程式：

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4 \\ -4x + 3y + 20 = 0 \end{cases}$$

を解けばよく、

$$9(x - 2)^2 + (3y + 12)^2 = 36$$

$$9(x - 2)^2 + (4x - 8)^2 = 36$$

$$25x^2 - 100x + 64 = 0$$

$$(5x - 10)^2 - 36 = 0$$

から $x = \frac{10 \pm 6}{5}$ が分かります。これを直線の方程式に戻せば

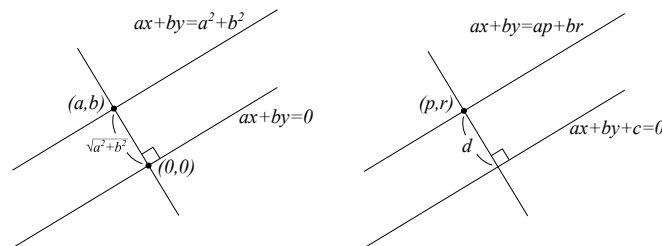
$$y = \frac{4x - 20}{3} = \frac{40 \pm 24 - 100}{15} = \frac{-20 \pm 8}{5}$$

です。この様に交点は当然2つありますが、問題の点 A は2点間の距離が最も短くなる点でしたから、これらのうち点 $B(5, 0)$ に近い方、すなわち $\left(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ です。□

基本演習 4 点と直線の距離の式を、出来るだけたくさん、異なった方法で示してください。

●直線の方程式の定数項に着目した検討

直線 $ax + by + c = 0$ はベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に直交しますから、下図左のようにこれと平行で原点を通る直線 $ax + by = 0$ と、やはり平行で (a, b) を通る直線 $ax + by = a^2 + b^2$ との間隔は $\sqrt{a^2 + b^2}$ です。



直線の方程式の定数項は各軸との切片に比例しますから、平行2直線の間隔と定数項の差の絶対値の比は常に $\sqrt{a^2 + b^2} : a^2 + b^2$ すなわち $1 : \sqrt{a^2 + b^2}$ であることが分かります。

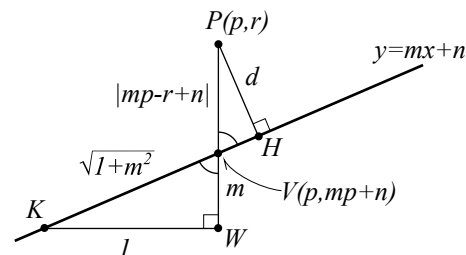
この確認の元に直線 $ax + by + c = 0$ とこれに平行で点 (p, r) を通る直線 $ax + by = ap + br$ を見ると、この2直線の間隔を d とすれば $d : |ap + br + c| = 1 : \sqrt{a^2 + b^2}$ が成り立っており、従って

$$d = \frac{|ap + br + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

です。

●幾何学的検討

直線が軸に垂直な場合は距離は簡単に計算できるので、そうでない場合のみ考えます。その場合、直線の式は $y = mx + n$ ($m \neq 0$) の形をしています。



図のような点 P と直線の位置関係の場合は、各点 V, W, K, H は、 $KW = 1$ になるようにとります。すると直線の傾きから $VW = |m|$ であり、また、点 V の座標は $V(p, mp + n)$ となりますから、 $PV = |r - (mp + n)| = |mp - r + n|$ です。

すると三角形 PVH と三角形 KVW の相似性から、

$$1 : \sqrt{1 + m^2} = d : |mp - r + n| \quad \text{すなわち} \quad d = \frac{|mp - r + n|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

を得ます。

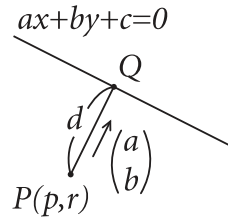
$ax + by + c = 0$ を、 $b \neq 0$ の時に変形すれば $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ ですから、一般には

$$d = \frac{\left| -\frac{a}{b}p - r - \frac{c}{b} \right|}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} = \frac{|ap + br + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となります。

●ベクトルを使った検討

点 P から直線に下ろした垂線の足を Q とします。すると、図から分かる様に、ベクトル $\vec{PQ}$ は直線に直交しますからこの直線の法線ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に平行であって $\vec{PQ} = t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と置く事が出来ます。従って



$$\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ} = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

によれば、点 Q が直線上にある事から

$$a(p + at) + b(r + bt) + c = 0$$

$$ap + br + c + (a^2 + b^2)t = 0, \quad \text{即ち} \quad t = -\frac{ap + br + c}{a^2 + b^2}$$

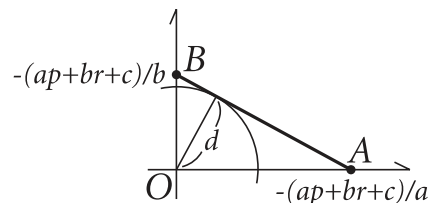
です。従って求める点と直線の距離 d は

$$d = \left| \vec{PQ} \right| = |t| \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ap + br + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となります。

●古典幾何学的な検討

円と直線が接していると解釈するにしても、何も重解条件だけが能ではありません。全体を平行移動して円の中心を原点にもってくれば、直線は $ax + by + ap + br + c = 0$ に移りますが、例えば a, b 共に 0 でない場合、この直線と座標軸の交点 A, B は簡単に求めることが出来ます（実際は第1象限にあるとは限りません）。



すると図の三角形 OAB の面積を2通りで計算すれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{ap + br + c}{a} \right)^2 + \left(-\frac{ap + br + c}{b} \right)^2} d &= \frac{1}{2} \left| -\frac{ap + br + c}{a} \right| \left| -\frac{ap + br + c}{b} \right| \\ \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} d &= \frac{|ap + br + c|}{|ab|} \\ d &= \frac{|ap + br + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

となってやはり同じ答えに辿り着きます（ $a = 0$ 等の場合はもっと簡単です）。□

基本演習 5 (1) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ が次のように有理関数によってパラメータ表示されることを確認してください（正確には点 $(-1, 0)$ は除きます）：

$$x = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad t \neq \pm 1$$

(2) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ と円 $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ があります。双曲線上の点で円の外部にある点から出発して円に接線を引き、その接線が再び双曲線と交わった点からもう一度別の接線を引くのを繰り返すと、どこから出発しても3回で元の点に戻る事を証明して下さい。

(1) 双曲線上の点は双曲線関数を使って $(\cosh \theta, \sinh \theta)$ とパラメトライズされますが、 $\tanh \frac{\theta}{2} = t$ と置けば

$$1 - \tanh^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\cosh^2 \frac{\theta}{2}}$$

であることと倍角の公式：

$$\cosh \theta = \cosh^2 \frac{\theta}{2} + \sinh^2 \frac{\theta}{2}, \quad \sinh \theta = 2 \cosh \frac{\theta}{2} \sinh \frac{\theta}{2}$$

から、

$$\begin{aligned} \cosh \theta &= \cosh^2 \frac{\theta}{2} + \sinh^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \cosh^2 \frac{\theta}{2} + \cosh^2 \frac{\theta}{2} \tanh^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \cosh^2 \frac{\theta}{2} \left(1 + \tanh^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \frac{1 + t^2}{1 - t^2} \\ \sinh \theta &= 2 \cosh \frac{\theta}{2} \sinh \frac{\theta}{2} = 2 \cosh^2 \frac{\theta}{2} \tanh \frac{\theta}{2} = \frac{2t}{1 - t^2} \end{aligned}$$

が分かり、有理関数によるパラメトライゼーション：

$$\left(\frac{1 + t^2}{1 - t^2}, \frac{2t}{1 - t^2} \right) \quad -\infty < t < -1, -1 < t < 1, 1 < t < \infty$$

が得られます（ただし、双曲線上の点 $(-1, 0)$ だけはこのパラメータでは表せません。 $t = \pm\infty$ に相当するからです。しかしこの点は円の内部にあるので今回は使いませんので問題ありません。なお、 $t = \pm 1$ に相当する点は無限遠方です）。

(2) 【最初の2接線】双曲線上に異なる3点

$$A\left(\frac{1+a^2}{1-a^2}, \frac{2a}{1-a^2}\right), B\left(\frac{1+b^2}{1-b^2}, \frac{2b}{1-b^2}\right), C\left(\frac{1+c^2}{1-c^2}, \frac{2c}{1-c^2}\right)$$

をとって、直線 AB, BC が円に接していると仮定します。

直線 AB の方程式は

$$y - \frac{2a}{1-a^2} = \frac{\frac{2a}{1-a^2} - \frac{2b}{1-b^2}}{\frac{1+a^2}{1-a^2} - \frac{1+b^2}{1-b^2}} \left(x - \frac{1+a^2}{1-a^2}\right)$$

ですが、これは垂直な接線（つまり、 $\frac{1+a^2}{1-a^2} = \frac{1+b^2}{1-b^2}$ 、すなわち $a = -b$ のときです）を表す事が出来ません。しかし、ちょっと変形して

$$\left(\frac{1+a^2}{1-a^2} - \frac{1+b^2}{1-b^2}\right) \left(y - \frac{2a}{1-a^2}\right) = \left(\frac{2a}{1-a^2} - \frac{2b}{1-b^2}\right) \left(x - \frac{1+a^2}{1-a^2}\right)$$

の形にしてやれば全ての場合を表現しています。これを整理すれば $a \neq b$ に注意して

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+a^2}{1-a^2} - \frac{1+b^2}{1-b^2}\right) \left(y - \frac{2a}{1-a^2}\right) &= \left(\frac{2a}{1-a^2} - \frac{2b}{1-b^2}\right) \left(x - \frac{1+a^2}{1-a^2}\right) \\ (2a^2 - 2b^2) \left(y - \frac{2a}{1-a^2}\right) &= \{2a - 2b + 2ab(a-b)\} \left(x - \frac{1+a^2}{1-a^2}\right) \\ (a+b)\{(1-a^2)y - 2a\} &= (ab+1)\{(1-a^2)x - 1 - a^2\} \end{aligned}$$

となり、更に変形すれば、 $a^2 \neq 1$ に注意して

$$\begin{aligned} (a+b)(1-a^2)y &= (ab+1)(1-a^2)x - (ab+1)(1+a^2) + 2a(a+b) \\ &= (ab+1)(1-a^2)x - a^3b - 1 + a^2 + ab \\ &= (ab+1)(1-a^2)x + (ab-1)(1-a^2) \\ 0 &= (ab+1)x - (a+b)y + ab - 1 \end{aligned}$$

が得られます。この直線が円 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ に接するための条件は、講義でやった様に

$$(ab+1)^2 + (a+b)^2 = \{(ab+1)(-1) + ab - 1\}^2 = 4$$

となります。全く同様に、直線 BC が円に接する条件は

$$(bc+1)^2 + (b+c)^2 = 4$$

となります。

【3本目の接線】3本目の直線 CA が円に接することが示せば良いわけですが、直線 CA が円に接する条件も同様に

$$(ca+1)^2 + (c+a)^2 = 4$$

となっている筈ですから、これを証明すれば良い事になります。

さて、今見た2本の直線が円に接する条件式を良く見ると：

$$\begin{cases} (ab+1)^2 + (a+b)^2 = 4 \\ (cb+1)^2 + (c+b)^2 = 4 \end{cases}$$

これは2次方程式：

$$(Xb+1)^2 + (X+b)^2 = 4$$

の2つの異なる解が a, c であると言う事を示していますから、この方程式を整理して：

$$(b^2+1)X^2 + 4bX + b^2 - 3 = 0$$

解と係数の関係から

$$c+a = -\frac{4b}{b^2+1}, \quad ca = \frac{b^2-3}{b^2+1}$$

であることが分かります。従って、

$$\begin{aligned} (ca+1)^2 + (c+a)^2 &= \left(\frac{b^2-3}{b^2+1} + 1\right)^2 + \left(-\frac{4b}{b^2+1}\right)^2 \\ &= \frac{(2b^2-2)^2}{(b^2+1)^2} + \frac{16b^2}{(b^2+1)^2} \\ &= \frac{4b^4 + 8b^2 + 4}{(b^2+1)^2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

が得られ、これは正に直線 CA がまた円に接している事を示しています。

以上によりどこから出発しても3回接線を引くと元の点に戻って来る事が証明されました。□

基本演習 6 (1) 一般に、円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ 上の点 (p_1, p_2) に於ける円の接線は、

$$(p_1-a)(x-a) + (p_2-b)(y-b) = c^2$$

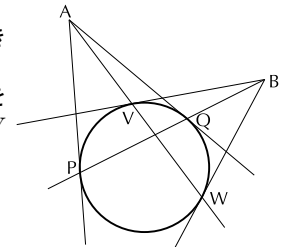
である事を示して下さい。

(2) 円 $x^2 + y^2 = 1$ に外部の点 $A(a_1, a_2)$ から引いた2本の接線の接点を $P(p_1, p_2), Q(q_1, q_2)$ とするとき接線 AP および AQ の方程式を求め、これを使って直線 PQ の方程式が $a_1x + a_2y = 1$ となる事を証明して下さい。

(3) 更に直線 PQ 上に円の外部の点 $B(b_1, b_2)$ を取ったとき $a_1b_1 + a_2b_2 = 1$ が成り立つ事を示して下さい。

(4) 点 B から円に引いた2本の接線の接点を $V(v_1, v_2), W(w_1, w_2)$ として (2) と同様にして直線 VW の方程式を求めて下さい。

(5) 3点 A, V, W は一直線上にある事を示して下さい。



(1) この直線が点 (p_1, p_2) を通る事は、

$$(p_1 - a)(p_1 - a) + (p_2 - b)(p_2 - b) = (p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2 = c^2$$

より明らかですし、この直線の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} p_1 - a \\ p_2 - b \end{pmatrix}$ で、これは円の中心から点 (p_1, p_2) へ向かうベクトルです。従ってこの直線は接線である事が分かります。

(2) (1) の結果から、点 P, Q に於ける円の接線は、それぞれ

$$p_1x + p_2y = 1, \quad q_1x + q_2y = 1$$

である事が分かります。この2接線の交点が $A(a_1, a_2)$ でしたから、

$$p_1a_1 + p_2a_2 = 1, \quad q_1a_1 + q_2a_2 = 1$$

が成り立つはずですが、

しかしこの2式をよく見ると、これは2点 P, Q が、直線

$$a_1x + a_2y = 1$$

の上にあると云う事を示していますね。

(3) 点 B はこの直線 PQ 上にあるはずですから

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 1 \quad (2.1)$$

が成り立ちます。

(4) 一方、点 V, W における円の接線はそれぞれ

$$v_1x + v_2y = 1, \quad w_1x + w_2y = 1$$

ですが、点 B はこの2接線の交点ですからこの2式を同時に満たします：

$$v_1b_1 + v_2b_2 = 1, \quad w_1b_1 + w_2b_2 = 1$$

そしてこれらの式をよくよく見れば、これもやはり点 V, W が直線

$$b_1x + b_2y = 1$$

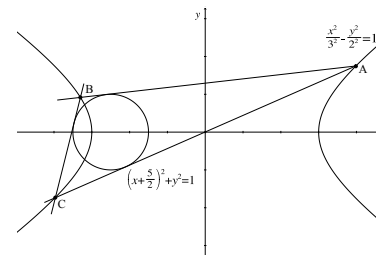
の上にある事を示しているではありませんか。

(5) そこでさっきの式 (2.1) を見返してみると、これは点 A もこの直線 $b_1x + b_2y = 1$ 上にあると言っています。

以上に依り、3点 A, V, W は同一直線上にある事が示されました。□

発展演習 7 双曲線 $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ 上の点 A から円 $(x + \frac{5}{2})^2 + y^2 = 1$ に向かって接線を引き、その接線がもう一度双曲線と交わった点を B とします。今度は点 B から同様に円に接線を引き (さっきとは別の接線にします)、また双曲線と交わった点を C とします。

このとき、点 C から円に引いた接線は点 A を通ることを示して下さい。ただし、点 A は円の外部にあるとします。



【特殊な点について】 いつも3本の接線が順に引けるのでしょうか。つまり、接点が双曲線との(もう一つの) 交点になってしまい、そこから2本目の接線が引けなくなってしまう (今引いたものしかない) ようなことはあるのでしょうか？

双曲線と円の交点を求めます。

$$\begin{cases} \frac{4}{9}x^2 - y^2 = 4 \\ (x + \frac{5}{2})^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

連立方程式を解けば

$$\begin{aligned} \frac{4}{9}x^2 + \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 &= 5 \\ \frac{13}{9}x^2 + 5x + \frac{5}{4} &= 0 \\ x^2 + \frac{45}{13}x + \frac{45}{52} &= 0 \end{aligned}$$

から $x = -\frac{45}{26} \pm \frac{12\sqrt{10}}{26}$ が得られますが、プラスの方は該当しませんので $x = -\frac{45+12\sqrt{10}}{26}$ です。このとき y -座標は円の方程式に代入して

$$\left(-\frac{45+12\sqrt{10}}{26} + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

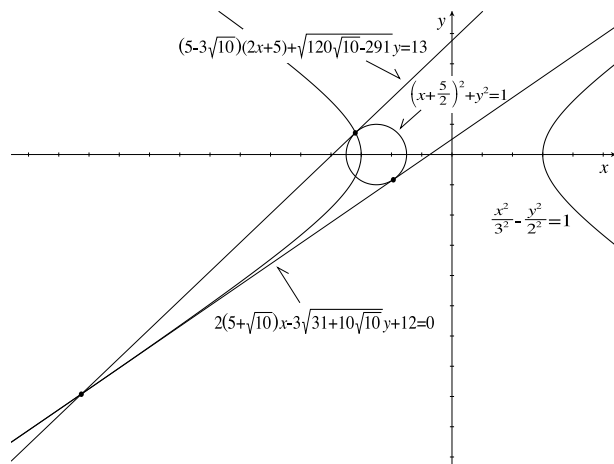
から

$$\begin{aligned} y^2 &= 1 - \left(\frac{12\sqrt{10}-20}{26}\right)^2 = \frac{120\sqrt{10}-291}{13^2} \\ y &= \pm \frac{\sqrt{120\sqrt{10}-291}}{13} \end{aligned}$$

ですから、交点は

$$\left(-\frac{45+12\sqrt{10}}{26}, \pm \frac{\sqrt{120\sqrt{10}-291}}{13}\right)$$

です。



次にこの点における円の接線がまた双曲線と交わる点を求めます。

点 $\left(-\frac{45+12\sqrt{10}}{26}, \frac{\sqrt{120\sqrt{10}-291}}{13}\right)$ における接線は

$$\begin{aligned} \left(-\frac{45+12\sqrt{10}}{26} + \frac{5}{2}\right) \left(x + \frac{5}{2}\right) + \frac{\sqrt{120\sqrt{10}-291}}{13} y &= 1 \\ \frac{20-12\sqrt{10}}{26} \left(x + \frac{5}{2}\right) + \frac{\sqrt{120\sqrt{10}-291}}{13} y &= 1 \\ \frac{5-3\sqrt{10}}{13} (2x+5) + \frac{\sqrt{120\sqrt{10}-291}}{13} y &= 1 \\ (5-3\sqrt{10})(2x+5) + \sqrt{120\sqrt{10}-291} y &= 13 \end{aligned}$$

であり、双曲線との交点を求めると

$$\begin{aligned} &\frac{4}{9} (120\sqrt{10}-291) x^2 - \left\{13 - (5-3\sqrt{10})(2x+5)\right\}^2 \\ &= 4 (120\sqrt{10}-291) \\ &4 (120\sqrt{10}-291) x^2 - 9 \left\{(6\sqrt{10}-10)x + 15\sqrt{10}-12\right\}^2 \\ &= 36 (120\sqrt{10}-291) \\ &4 (120\sqrt{10}-291) x^2 \\ &- 9 \left\{(6\sqrt{10}-10)^2 x^2 + 2 (15\sqrt{10}-12) (6\sqrt{10}-10) x + (15\sqrt{10}-12)^2\right\}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 36 (120\sqrt{10}-291) \\ &4 (120\sqrt{10}-291) x^2 - 9 \left\{(460-120\sqrt{10}) x^2 + 2 (1020-222\sqrt{10}) x + (2394-360\sqrt{10})\right\} \\ &= 36 (120\sqrt{10}-291) \\ &0 = (13 \cdot 120\sqrt{10} - 5304) x^2 - 9 \cdot 2 (1020 - 222\sqrt{10}) x - 11070 - 1080\sqrt{10} \\ &= 13 \cdot 4 \cdot 6 (5\sqrt{10} - 17) x^2 - 9 \cdot 6 \cdot 2 (170 - 37\sqrt{10}) x - 10 \cdot 9 \cdot 3 (41 + 4\sqrt{10}) \\ &= 13 \cdot 4 (5\sqrt{10} - 17) x^2 - 9 \cdot 2 (170 - 37\sqrt{10}) x - 5 \cdot 9 (41 + 4\sqrt{10}) \\ &= 13 \cdot 4 x^2 + 6 \frac{(1040 + 221\sqrt{10})}{13} x + 5 \cdot 3 \frac{(897 + 273\sqrt{10})}{13} \\ &= 26^2 x^2 + 6 \cdot 13 (80 + 17\sqrt{10}) x + 5 \cdot 3 (897 + 273\sqrt{10}) \\ &= 26^2 x^2 + 6 \cdot 13 (80 + 17\sqrt{10}) x + 13 \cdot 3 (45 + 12\sqrt{10}) (5 + \sqrt{10}) \\ &= 26^2 x^2 + 26^2 \frac{240 + 51\sqrt{10}}{26} x + 26^2 \frac{45 + 12\sqrt{10}}{26} \frac{15 + 3\sqrt{10}}{2} \\ &= 26^2 \left(x + \frac{45 + 12\sqrt{10}}{26}\right) \left(x + \frac{15 + 3\sqrt{10}}{2}\right) \end{aligned}$$

から、もう1点の x -座標は $-\frac{15+3\sqrt{10}}{2}$ であることが分かります。
この点の y -座標は

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{4}{9} x^2 - 4 \\ &= \frac{4}{9} \frac{(15 + 3\sqrt{10})^2}{4} - 4 \\ &= 35 + 10\sqrt{10} - 4 \\ &= 31 + 10\sqrt{10} \\ y &= \pm \sqrt{31 + 10\sqrt{10}} \end{aligned}$$

のうちマイナスの方であり、交点は $\left(-\frac{15+3\sqrt{10}}{2}, -\sqrt{31+10\sqrt{10}}\right)$ です。
この点における双曲線の接線は

$$\begin{aligned} &\frac{4}{9} \left(-\frac{15+3\sqrt{10}}{2}\right) x - \left(-\sqrt{31+10\sqrt{10}}\right) y = 4 \\ &-2(15+3\sqrt{10})x + 9\sqrt{31+10\sqrt{10}}y = 36 \\ &-2(5+\sqrt{10})x + 3\sqrt{31+10\sqrt{10}}y = 12 \\ &2(5+\sqrt{10})x - 3\sqrt{31+10\sqrt{10}}y + 12 = 0 \end{aligned}$$

ですから、この接線と円の中心 $(-\frac{5}{2}, 0)$ との距離を測ると、

$$\frac{|2(5+\sqrt{10})(-\frac{5}{2}) + 12|}{\sqrt{4(5+\sqrt{10})^2 + 9(31+10\sqrt{10})}} = \frac{13+5\sqrt{10}}{\sqrt{4(35+10\sqrt{10}) + 279+90\sqrt{10}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{13 + 5\sqrt{10}}{\sqrt{419 + 130\sqrt{10}}} \\
&= \frac{13 + 5\sqrt{10}}{\sqrt{(13 + 5\sqrt{10})^2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

となっており、この接線は円にも接している（共通接線）ことが分かります。

このような場合には問題が言うような3本の接線を引くことは出来ませんので、そのような場合は除外することにします。

具体的には、点 A としては $\left(-\frac{15+3\sqrt{10}}{2}, -\sqrt{31+10\sqrt{10}}\right)$ と対称点である点 $\left(-\frac{15+3\sqrt{10}}{2}, +\sqrt{31+10\sqrt{10}}\right)$ は除外しておきます。

双曲線の右半分からは円と双曲線の共通接線は引けないことに注意します。この円は双曲線の漸近線と交わりません。従って双曲線の右半分の上の点における双曲線の接線は円と交わることは（接すること）ありません。また、双曲線の左半分と円の共通接線は先に見たように2本存在しますが、（漸近線の中に入らないので）これが双曲線の右半分と交わることもありません。

また、点 A は円の外部の点としてあるので、そもそも円と双曲線の交点 $\left(-\frac{45+12\sqrt{10}}{26}, \pm\frac{\sqrt{120\sqrt{10}-291}}{13}\right)$ から始めることは考えていません。

【一般的な点について】双曲線のパラメータ表示：

$$x = 3\frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad y = 2\frac{2t}{1-t^2}, \quad t \neq \pm 1$$

を使って、3点 A, B, C を

$$A\left(\frac{3(1+a^2)}{1-a^2}, \frac{4a}{1-a^2}\right), \quad B\left(\frac{3(1+b^2)}{1-b^2}, \frac{4b}{1-b^2}\right), \quad C\left(\frac{3(1+c^2)}{1-c^2}, \frac{4c}{1-c^2}\right)$$

と置きます（このパラメータ表示では双曲線上の点 $(-3, 0)$ は表せませんが、これは円の内部ですから問題ありません）。

直線 AB の式は

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{3(1+a^2)}{1-a^2} - \frac{3(1+b^2)}{1-b^2}\right)\left(y - \frac{4a}{1-a^2}\right) = \left(\frac{4a}{1-a^2} - \frac{4b}{1-b^2}\right)\left(x - \frac{3(1+a^2)}{1-a^2}\right) \\
&3\left(\frac{1+a^2}{1-a^2} - \frac{1+b^2}{1-b^2}\right)\left(y - \frac{4a}{1-a^2}\right) = 4\left(\frac{a}{1-a^2} - \frac{b}{1-b^2}\right)\left(x - \frac{3(1+a^2)}{1-a^2}\right) \\
&3\{(1+a^2)(1-b^2) - (1+b^2)(1-a^2)\}\left(y - \frac{4a}{1-a^2}\right) \\
&= 4\{a(1-b^2) - b(1-a^2)\}\left(x - \frac{3(1+a^2)}{1-a^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6(a-b)(a+b)\left(y - \frac{4a}{1-a^2}\right) &= 4(a-b)(1+ab)\left(x - \frac{3(1+a^2)}{1-a^2}\right) \\
3(a+b)\left(y - \frac{4a}{1-a^2}\right) &= 2(1+ab)\left(x - \frac{3(1+a^2)}{1-a^2}\right) \\
3(a+b)y - \frac{12a(a+b)}{1-a^2} &= 2(1+ab)x - \frac{6(1+ab)(1+a^2)}{1-a^2}
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
2(1+ab)x - 3(a+b)y + 6\left\{\frac{2a(a+b) - (1+ab)(1+a^2)}{1-a^2}\right\} &= 0 \\
2(1+ab)x - 3(a+b)y + 6\left\{\frac{a^2+ab-1-a^3b}{1-a^2}\right\} &= 0 \\
2(1+ab)x - 3(a+b)y + 6(ab-1) &= 0
\end{aligned}$$

となります。

従って直線 AB が円と接する条件は

$$\begin{aligned}
\left|2(1+ab)\left(-\frac{5}{2}\right) + 6(ab-1)\right| &= \sqrt{4(1+ab)^2 + 9(a+b)^2} \\
(ab-11)^2 &= 4(1+ab)^2 + 9(a+b)^2
\end{aligned}$$

となります。

全く同様に、直線 BC が円と接する条件は

$$(bc-11)^2 = 4(1+bc)^2 + 9(b+c)^2$$

になり、これらを合わせると2次方程式：

$$(bX-11)^2 = 4(bX+1)^2 + 9(X+b)^2$$

すなわち

$$(3b^2+9)X^2 + 48bX + 9b^2 - 117 = 0$$

の2つの解が a, c であることが分かりますから、解と係数の関係によって

$$a+c = -\frac{48b}{3b^2+9}, \quad ac = \frac{9b^2-117}{3b^2+9}$$

が分かります。すると、

$$\begin{aligned}
4(1+ac)^2 + 9(a+c)^2 &= 4\left(1 + \frac{9b^2-117}{3b^2+9}\right)^2 + 9 \cdot \frac{48^2b^2}{(3b^2+9)^2} \\
&= 4\left(\frac{12b^2-108}{3b^2+9}\right)^2 + 4 \cdot 4 \cdot \frac{12b^2 \cdot 108}{(3b^2+9)^2} \\
&= 4\left(\frac{12b^2+108}{3b^2+9}\right)^2 \\
&= \left(\frac{24b^2+216}{3b^2+9}\right)^2
\end{aligned}$$

$$= (ac - 11)^2$$

が得られ、これは直線 CA がまた円に接することを示しています。
以上から題意は証明されました。 $\square$

発展演習 8 [1990 京大前期理系に類題] 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の内部に円 $x^2 + y^2 = 1$ がある
とします ($a, b > 0$)。楕円周上の任意の点から出発して内部の円に接線を引いてゆきます。
3回接線を引いて元の出発点に戻って来るための a, b の条件を求めて下さい。

楕円周上の点は $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ でパラメトライズされますが、更に $\tan \frac{\theta}{2} = t$ と置けば、
 $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1 + t^2}$ なので

$$\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}$$

によって $(a \cos \theta, b \sin \theta) = \left(a \frac{1-t^2}{1+t^2}, b \frac{2t}{1+t^2}\right)$ と云う風に置く事が出来ます (ただし点 $(-a, 0)$ は除く)。

まず最初に特殊な場合を見ておきます。点 $(-a, 0)$ から出発して3回で元に戻って来る場合を考えると、対称性から3点 $(-a, 0), \left(1, \pm b \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}\right)$ の作る三角形が円に外接し楕円に内接しなければならぬ事が分かります。

2点 $(-a, 0), \left(1, b \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}\right)$ を通る直線の方程式は

$$y = \frac{b \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}}{1 + a} (x + a) \quad \text{即ち} \quad (1 + a)y = b \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} x + ab \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}$$

なのでこれが円 $x^2 + y^2 = 1$ と接するための条件は、講義中にやったように

$$\begin{aligned} b^2 \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) + (1 + a)^2 &= a^2 b^2 \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \\ b^2 (a^2 - 1) + a^2 (1 + a)^2 &= a^2 b^2 (a^2 - 1) \\ (1 - a) b^2 (a - 1) + a^2 &= 0 \\ a^2 &= b^2 (a - 1)^2 \\ a &= b (a - 1) \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= 1 \end{aligned}$$

ですからこれが成り立てば3回で戻って来る事が分かります (円が楕円の内部にあると云う条件から $a > 1$ である事に注意)。

次に一般の場合を考えます。

楕円周上に3点 $P \left(a \frac{1-p^2}{1+p^2}, b \frac{2p}{1+p^2}\right), Q \left(a \frac{1-q^2}{1+q^2}, b \frac{2q}{1+q^2}\right), R \left(a \frac{1-r^2}{1+r^2}, b \frac{2r}{1+r^2}\right)$ があって、直線 PQ, QR が円に接しているとしましょう。

さっきやった点 $(-a, 0)$ が含まれる場合と、これを y 軸に関して折り返した点 $(a, 0)$ を含む場合は除いて考えますので、この3点は x 座標が全て異なり、これらのうち2点間を結ぶ直線 y 軸には平行ではありません。

直線 PQ の方程式は

$$\begin{aligned} y - b \frac{2p}{1+p^2} &= \frac{b \frac{2q}{1+q^2} - b \frac{2p}{1+p^2}}{a \frac{1-q^2}{1+q^2} - a \frac{1-p^2}{1+p^2}} \left(x - a \frac{1-p^2}{1+p^2}\right) \\ &= \frac{b(2q)(1+p^2) - b(2p)(1+q^2)}{a(1-q^2)(1+p^2) - a(1-p^2)(1+q^2)} \left(x - a \frac{1-p^2}{1+p^2}\right) \\ &= \frac{b(p-q)(pq-1)}{a(p^2-q^2)} \left(x - a \frac{1-p^2}{1+p^2}\right) \\ &= \frac{b(pq-1)}{a(p+q)} \left(x - a \frac{1-p^2}{1+p^2}\right) \\ y &= \frac{b(pq-1)}{a(p+q)} x - b \frac{(pq-1)(1-p^2)}{(1+p^2)(p+q)} + b \frac{2p}{1+p^2} \\ &= \frac{b(pq-1)}{a(p+q)} x + b \frac{2p(p+q) - (pq-1)(1-p^2)}{(1+p^2)(p+q)} \\ &= \frac{b(pq-1)}{a(p+q)} x + b \frac{p^2 + pq + p^3 q + 1}{(1+p^2)(p+q)} \\ &= \frac{b(pq-1)}{a(p+q)} x + b \frac{1+pq}{p+q} \\ a(p+q)y &= b(pq-1)x + ab(pq+1) \end{aligned}$$

となるので、これが円 $x^2 + y^2 = 1$ と接する条件は

$$b^2(pq-1)^2 + a^2(p+q)^2 = a^2 b^2(pq+1)^2$$

となります。全く同様に直線 QR が円に接する条件も

$$b^2(qr-1)^2 + a^2(q+r)^2 = a^2 b^2(qr+1)^2$$

となります。

この2つの条件を並べてみると

$$\begin{cases} b^2(pq-1)^2 + a^2(p+q)^2 = a^2 b^2(pq+1)^2 \\ b^2(rq-1)^2 + a^2(r+q)^2 = a^2 b^2(rq+1)^2 \end{cases}$$

でありこれは X の方程式

$$b^2(Xq-1)^2 + a^2(X+q)^2 = a^2 b^2(Xq+1)^2$$

の2つの解が p, r である事を示しています。これを整理すると

$$(b^2 q^2 + a^2 - a^2 b^2 q^2) X^2 + (-2b^2 q + 2a^2 q - 2a^2 b^2 q) X + b^2 + a^2 q^2 - a^2 b^2 = 0$$

であり、解と係数の関係から

$$p+r = \frac{2b^2 q - 2a^2 q + 2a^2 b^2 q}{b^2 q^2 + a^2 - a^2 b^2 q^2}, \quad pr = \frac{b^2 + a^2 q^2 - a^2 b^2}{b^2 q^2 + a^2 - a^2 b^2 q^2}$$

が分かります。

一方直線 RP が円に接するための条件式も全く同様に

$$b^2(pr-1)^2 + a^2(p+r)^2 = a^2b^2(pr+1)^2$$

となるわけですが、これは

$$\begin{aligned} pr \pm 1 &= \frac{b^2 + a^2q^2 - a^2b^2}{b^2q^2 + a^2 - a^2b^2q^2} \pm 1 \\ &= \frac{b^2 + a^2q^2 - a^2b^2 \pm (b^2q^2 + a^2 - a^2b^2q^2)}{b^2q^2 + a^2 - a^2b^2q^2} \\ &= \frac{b^2 + a^2q^2 - a^2b^2 \pm b^2q^2 \pm a^2 \mp a^2b^2q^2}{b^2q^2 + a^2 - a^2b^2q^2} \\ &= \frac{b^2 \pm b^2q^2 \pm a^2 + a^2q^2 - a^2b^2 \mp a^2b^2q^2}{b^2q^2 + a^2 - a^2b^2q^2} \\ &= \frac{b^2(1 \pm q^2) \pm a^2(1 \pm q^2) - a^2b^2(1 \pm q^2)}{b^2q^2 + a^2 - a^2b^2q^2} \\ &= \frac{(1 \pm q^2)(b^2 \pm a^2 - a^2b^2)}{b^2q^2 + a^2 - a^2b^2q^2} \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} b^2 \frac{(1-q^2)^2(b^2-a^2-a^2b^2)^2}{(b^2q^2+a^2-a^2b^2q^2)^2} + a^2 \frac{4q^2(b^2-a^2+a^2b^2)^2}{(b^2q^2+a^2-a^2b^2q^2)^2} \\ = a^2b^2 \frac{(1+q^2)^2(b^2+a^2-a^2b^2)^2}{(b^2q^2+a^2-a^2b^2q^2)^2} \\ b^2(1-q^2)^2(b^2-a^2-a^2b^2)^2 + a^24q^2(b^2-a^2+a^2b^2)^2 \\ = a^2b^2(1+q^2)^2(b^2+a^2-a^2b^2)^2 \end{aligned}$$

となり、これが成り立てば3回で元の点に戻って来るわけです。これを

$$b^2(1-q^2)^2(b^2-a^2-a^2b^2)^2 + a^24q^2(b^2-a^2+a^2b^2)^2 - a^2b^2(1+q^2)^2(b^2+a^2-a^2b^2)^2 = 0$$

としてもう少し詳しく見て行きましょう。

左辺を展開した時の q^4 の係数と定数項は同じになっていますが、それは

$$\begin{aligned} &b^2(b^2-a^2-a^2b^2)^2 - a^2b^2(b^2+a^2-a^2b^2)^2 \\ &= b^2\{(b^2-a^2-a^2b^2) + a(b^2+a^2-a^2b^2)\}\{(b^2-a^2-a^2b^2) - a(b^2+a^2-a^2b^2)\} \\ &= b^2(b^2-a^2b^2+a^3-a^2+ab^2-a^3b^2)(b^2-a^2b^2-a^2-a^3-ab^2+a^3b^2) \\ &= b^2\{b^2(1-a^2)-a^2(1-a)+ab^2(1-a^2)\}\{b^2(1-a^2)-a^2(1+a)-ab^2(1-a^2)\} \\ &= b^2(1-a^2)\{b^2(1+a)-a^2+ab^2(1+a)\}\{b^2(1-a)-a^2-ab^2(1-a)\} \\ &= b^2(1-a^2)(b^2+ab^2-a^2+ab^2+a^2b^2)(b^2-ab^2-a^2-ab^2+a^2b^2) \\ &= b^2(1-a^2)(b+ab-a)(b+ab+a)(b-ab-a)(b-ab+a) \end{aligned}$$

であり、 q^2 の係数は

$$\begin{aligned} &-2b^2(b^2-a^2-a^2b^2)^2 + 4a^2(b^2-a^2+a^2b^2)^2 - 2a^2b^2(b^2+a^2-a^2b^2)^2 \\ &= -2b^2(b^2-a^2-a^2b^2)^2 + 2a^2b^2(b^2+a^2-a^2b^2)^2 \\ &\quad + 4a^2(b^2-a^2+a^2b^2)^2 - 4a^2b^2(b^2+a^2-a^2b^2)^2 \\ &= -2\{b^2(b^2-a^2-a^2b^2)^2 - a^2b^2(b^2+a^2-a^2b^2)^2\} \\ &\quad + 4\{a^2(a^2-b^2-b^2a^2)^2 - b^2a^2(a^2+b^2-b^2a^2)^2\} \end{aligned}$$

と変形すれば、第1項はさっきやった q^4 の係数と同じであり、第2項はそこで a と b を入れ替えたものになっていますので

$$\begin{aligned} &= -2b^2(1-a^2)(b+ab-a)(b+ab+a)(b-ab-a)(b-ab+a) \\ &\quad + 4a^2(1-b^2)(a+ab-b)(a+ab+b)(a-ab-b)(a-ab+b) \\ &= -2b^2(1-a^2)(b+ab-a)(b+ab+a)(b-ab-a)(b-ab+a) \\ &\quad + 4a^2(1-b^2)(b+ab-a)(b+ab+a)(b-ab-a)(b-ab+a) \\ &= \{-2b^2(1-a^2) + 4a^2(1-b^2)\}(b+ab-a)(b+ab+a)(b-ab-a)(b-ab+a) \\ &= 2(2a^2-a^2b^2-b^2)(b+ab-a)(b+ab+a)(b-ab-a)(b-ab+a) \end{aligned}$$

が分かります。

以上により、直線 RP が円に接する条件は

$$(b+ab-a)(b+ab+a)(b-ab-a)(b-ab+a) \{b^2(1-a^2)q^4 + 2(2a^2-a^2b^2-b^2)q^2 + b^2(1-a^2)\} = 0$$

である事が分かります。

ここで、 q の4次方程式

$$b^2(1-a^2)q^4 + 2(2a^2-a^2b^2-b^2)q^2 + b^2(1-a^2) = 0$$

において $q^2 = X$ とした2次方程式

$$b^2(1-a^2)X^2 + 2(2a^2-a^2b^2-b^2)X + b^2(1-a^2) = 0$$

を考えて判別式を見てみると、

$$\begin{aligned} (\text{判別式}) &= (2a^2-a^2b^2-b^2)^2 - b^4(1-a^2)^2 \\ &= (2a^2-a^2b^2-b^2+b^2-b^2a^2)(2a^2-a^2b^2-b^2-b^2+a^2b^2) \\ &= 4a^2(1-b^2)(a^2-b^2) \end{aligned}$$

なので、 $1 < b$ によれば $a > b$ のとき判別式は負ですから実数解は存在しません。当然元の q の4次方程式にも実数解は存在しません。

また、 $a \leq b$ の時は X の2次方程式の解を X_1, X_2 とすると

$$X_1 + X_2 = -\frac{2a^2-a^2b^2-b^2}{b^2(1-a^2)} = -\frac{a^2-b^2+a^2(1-b^2)}{b^2(1-a^2)} < 0$$

であるのに $X_1 X_2 = 1$ となってしまう、 X_1, X_2 ともに負である事が分かります。従って元の q の4次方程式は実数解を一つも持たない事が分かります。

以上により q の4次方程式は実数解をもちませんから結局

$$(b + ab - a)(b + ab + a)(b - ab - a)(b - ab + a) = 0$$

である事が分かりました。しかし、 $a > 1, b > 1$ であったことから

$$b + ab - a > b + a - a = b > 0$$

$$b + ab + a > 0$$

$$b - ab - a = (1 - a)b - a < 0$$

となってしまう、結局の所 $b - ab + a = 0$ となるしかありません。これはすなわち

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$$

を意味しており、最初に特殊な点について考えた時に出て来た条件に一致しています。

以上から、どこから出発しても3回で元に戻って来るための条件は

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$$

となります。

□

発展演習 9 [2002 センター試験に類題] 円周 $(x - \sqrt{3})^2 + y^2 = 9$ 上の点から出発してこの円の内部にある別の円 $x^2 + y^2 = 1$ に接線を引いて行きます。どの点から出発しても3回接線を引いた時にまた出発点に戻って来る事を証明して下さい。

まず最初に特殊な場合を計算しておきましょう。

外側の円周上の点 $A(-3 + \sqrt{3}, 0)$ から点 $B(1, \sqrt{5 + 2\sqrt{3}})$ へ引いた直線は

$$y = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}{1 + 3 - \sqrt{3}}(x + 3 - \sqrt{3})$$

$$(4 - \sqrt{3})y = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}x + (3 - \sqrt{3})\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$$

なので、

$$5 + 2\sqrt{3} + (4 - \sqrt{3})^2 - (3 - \sqrt{3})^2(5 + 2\sqrt{3}) = 24 - 6\sqrt{3} - (12 - 6\sqrt{3})(5 + 2\sqrt{3}) = 0$$

となっていて円 $x^2 + y^2 = 1$ に接しています。と云う事は、全く同様に点 $A(-3 + \sqrt{3}, 0)$ から点 $C(1, -\sqrt{5 + 2\sqrt{3}})$ へ引いた直線も円 $x^2 + y^2 = 1$ に接しており、直線 CB も円 $x^2 + y^2 = 1$ に接している事から例えば点 A から出発すれば3回で元の点に戻って来ています。

また、外側の円周上の点 $D(3 + \sqrt{3}, 0)$ から点 $E(-1, \sqrt{5 - 2\sqrt{3}})$ に引いた直線は

$$y = \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}{-1 - 3 - \sqrt{3}}(x - 3 - \sqrt{3})$$

$$(-4 - \sqrt{3})y = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}x - (3 + \sqrt{3})\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$$

なので、

$$5 - 2\sqrt{3} + (4 + \sqrt{3})^2 - (3 + \sqrt{3})^2(5 - 2\sqrt{3})$$

$$= 24 + 6\sqrt{3} - (12 + 6\sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3})$$

$$= 0$$

となっていて円 $x^2 + y^2 = 1$ に接しています。と云う事は、全く同様に点 $D(3 + \sqrt{3}, 0)$ から点 $F(-1, -\sqrt{5 - 2\sqrt{3}})$ へ引いた直線も円 $x^2 + y^2 = 1$ に接しており、直線 FE も円 $x^2 + y^2 = 1$ に接している事から例えば点 D から出発すれば3回で元の点に戻って来ています。

次に一般の場合を計算します。外側の円周上の点で点 A 以外のものは $\left(3\frac{1-t^2}{1+t^2} + \sqrt{3}, \frac{6t}{1+t^2}\right)$ と云う風にパラメトライズされます。

外側の円周上の3点 $P\left(3\frac{1-p^2}{1+p^2} + \sqrt{3}, \frac{6p}{1+p^2}\right), Q\left(3\frac{1-q^2}{1+q^2} + \sqrt{3}, \frac{6q}{1+q^2}\right),$ および $R\left(3\frac{1-r^2}{1+r^2} + \sqrt{3}, \frac{6r}{1+r^2}\right)$ はさっき計算した6点 A, B, C, D, E, F のいずれでもないとし、直線 PQ, QR は内側の円に接していると仮定します。

直線 PQ の方程式は

$$y - \frac{6p}{1+p^2} = \frac{\frac{6q}{1+q^2} - \frac{6p}{1+p^2}}{3\frac{1-q^2}{1+q^2} + \sqrt{3} - 3\frac{1-p^2}{1+p^2} - \sqrt{3}}\left(x - 3\frac{1-p^2}{1+p^2} - \sqrt{3}\right)$$

$$= 2\frac{q(1+p^2) - p(1+q^2)}{(1-q^2)(1+p^2) - (1-p^2)(1+q^2)}\left(x - 3\frac{1-p^2}{1+p^2} - \sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{(pq-1)(p-q)}{p^2 - q^2}\left(x - 3\frac{1-p^2}{1+p^2} - \sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{pq-1}{p+q}\left(x - 3\frac{1-p^2}{1+p^2} - \sqrt{3}\right)$$

であり、これを整理すれば

$$(p+q)(1+p^2)y - 6p(p+q) = (pq-1)(1+p^2)x$$

$$- 3(pq-1)(1-p^2) - \sqrt{3}(pq-1)(1+p^2)$$

$$(p+q)(1+p^2)y = (pq-1)(1+p^2)x - 3(pq-1)(1-p^2)$$

$$- \sqrt{3}(pq-1)(1+p^2) + 6p(p+q)$$

$$= (pq-1)(1+p^2)x + 3pq + 3p^3q + 3 + 3p^2$$

$$- \sqrt{3}(pq + p^3q - 1 - p^2)$$

$$= (pq-1)(1+p^2)x$$

$$+ (3 - \sqrt{3})pq(1+p^2) + (3 + \sqrt{3})(1+p^2)$$

$$(p+q)y = (pq-1)x + (3 - \sqrt{3})pq + (3 + \sqrt{3})$$

となるのでこれが内部の円 $x^2 + y^2 = 1$ と接する事から

$$(pq-1)^2 + (p+q)^2 = \left\{(3 - \sqrt{3})pq + (3 + \sqrt{3})\right\}^2$$

が成り立つ事が分かります。全く同様にして直線 QR が内部の円と接する事から

$$(qr - 1)^2 + (q + r)^2 = \{(3 - \sqrt{3})qr + (3 + \sqrt{3})\}^2$$

が成り立つ事も分かります。

この2つの式を並べて良く見ると

$$\begin{cases} (pq - 1)^2 + (p + q)^2 = \{(3 - \sqrt{3})pq + (3 + \sqrt{3})\}^2 \\ (rq - 1)^2 + (r + q)^2 = \{(3 - \sqrt{3})rq + (3 + \sqrt{3})\}^2 \end{cases}$$

ですから、これは X の2次方程式：

$$(Xq - 1)^2 + (X + q)^2 = \{(3 - \sqrt{3})Xq + (3 + \sqrt{3})\}^2$$

が2つの解 p, r をもつ事を示しています。この方程式を X について整理すれば

$$\begin{aligned} (Xq - 1)^2 + (X + q)^2 &= \{(3 - \sqrt{3})Xq + (3 + \sqrt{3})\}^2 \\ 0 &= \{(3 - \sqrt{3})^2 q^2 - q^2 - 1\}X^2 + 12qX + \{(3 + \sqrt{3})^2 - 1 - q^2\} \end{aligned}$$

となるので、解と係数の関係から

$$p + r = \frac{12q}{q^2 + 1 - (3 - \sqrt{3})^2 q^2}, \quad pr = \frac{q^2 + 1 - (3 + \sqrt{3})^2}{q^2 + 1 - (3 - \sqrt{3})^2 q^2}$$

となっている事が分かります。

直線 RP がまた内部の円の接線となるための条件は同様に

$$(rp - 1)^2 + (r + p)^2 = \{(3 - \sqrt{3})rp + (3 + \sqrt{3})\}^2 \quad (2.2)$$

が成り立つ事でしたので、あとはこれを証明してやれば良い事になります。両辺をそれぞれ計算すると、

$$pr - 1 = \frac{q^2 + 1 - (3 + \sqrt{3})^2}{q^2 + 1 - (3 - \sqrt{3})^2 q^2} - 1 = \frac{(3 - \sqrt{3})^2 q^2 - (3 + \sqrt{3})^2}{q^2 + 1 - (3 - \sqrt{3})^2 q^2}$$

ですから

$$\begin{aligned} (pr - 1)^2 + (p + r)^2 &= \frac{\{(3 - \sqrt{3})^2 q^2 - (3 + \sqrt{3})^2\}^2}{\{q^2 + 1 - (3 - \sqrt{3})^2 q^2\}^2} + \frac{12^2 q^2}{\{q^2 + 1 - (3 - \sqrt{3})^2 q^2\}^2} \end{aligned}$$

の所で分子だけ計算すれば

$$\begin{aligned} (\text{右辺分子}) &= \{(3 - \sqrt{3})^2 q^2 - (3 + \sqrt{3})^2\}^2 + 12^2 q^2 \\ &= (3 - \sqrt{3})^4 q^4 + (3 + \sqrt{3})^4 - 2(3 - \sqrt{3})^2 q^2 (3 + \sqrt{3})^2 + 12^2 q^2 \\ &= (3 - \sqrt{3})^4 q^4 + (3 + \sqrt{3})^4 - 2 \cdot 6^2 q^2 + 12^2 q^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (3 - \sqrt{3})^4 q^4 + (3 + \sqrt{3})^4 + 2 \cdot 6^2 q^2 \\ &= \{(3 - \sqrt{3})^2 q^2 + (3 + \sqrt{3})^2\}^2 \end{aligned}$$

によって

$$(pr - 1)^2 + (p + r)^2 = \frac{\{(3 - \sqrt{3})^2 q^2 + (3 + \sqrt{3})^2\}^2}{\{q^2 + 1 - (3 - \sqrt{3})^2 q^2\}^2}$$

が分かりますが、

$$\begin{aligned} &(3 - \sqrt{3})rp + (3 + \sqrt{3}) \\ &= (3 - \sqrt{3}) \frac{q^2 + 1 - (3 + \sqrt{3})^2}{q^2 + 1 - (3 - \sqrt{3})^2 q^2} + (3 + \sqrt{3}) \\ &= \frac{(3 - \sqrt{3})\{q^2 + 1 - (3 + \sqrt{3})^2\} + (3 + \sqrt{3})\{q^2 + 1 - (3 - \sqrt{3})^2 q^2\}}{q^2 + 1 - (3 - \sqrt{3})^2 q^2} \\ &= \frac{\{(3 - \sqrt{3})(q^2 + 1) - 6(3 + \sqrt{3})\} + \{(3 + \sqrt{3})(q^2 + 1) - 6(3 - \sqrt{3})q^2\}}{q^2 + 1 - (3 - \sqrt{3})^2 q^2} \\ &= \frac{6(q^2 + 1) - 6(3 + \sqrt{3}) - 6(3 - \sqrt{3})q^2}{q^2 + 1 - (3 - \sqrt{3})^2 q^2} \\ &= \frac{-(12 - 6\sqrt{3})q^2 - (12 + 6\sqrt{3})}{q^2 + 1 - (3 - \sqrt{3})^2 q^2} \\ &= \frac{-(3 - \sqrt{3})^2 q^2 - (3 + \sqrt{3})^2}{q^2 + 1 - (3 - \sqrt{3})^2 q^2} \\ &= \frac{\{(3 - \sqrt{3})rp + (3 + \sqrt{3})\}^2}{\{q^2 + 1 - (3 - \sqrt{3})^2 q^2\}^2} \\ &= \frac{\{(3 - \sqrt{3})^2 q^2 + (3 + \sqrt{3})^2\}^2}{\{q^2 + 1 - (3 - \sqrt{3})^2 q^2\}^2} \end{aligned}$$

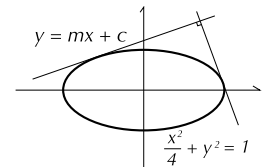
となって結局 (2.2) は成り立っている事が分かりました。

以上により、どの点から出発しても3回で元に戻って来る事が証明されました。 □

発展演習 10 [1980 東大編入試に類題] 楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ において、

(1) 傾き m の接線 $y = mx + c$ の切片 c を m を使って表して下さい。

(2) 直交する接線の交点の軌跡が円になる事を示して下さい。



(1) 直線 $y = mx + c$ は楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ に接するので、連立方程式：

$$\begin{cases} y = mx + c \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$$

はただ一組の解しか持ちません。従って、第1式を第2式に代入して得られる x の2次方程式：

$$\frac{x^2}{4} + (mx + c)^2 = 1$$

は重解を持つ事が分かります。そこで、整理して

$$\left(\frac{1}{4} + m^2\right)x^2 + 2mcx + c^2 - 1 = 0$$

判別式を見れば

$$mc^2 - \left(\frac{1}{4} + m^2\right)(c^2 - 1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad -\frac{1}{4}(c^2 - 1) + m^2 = 0$$

ですから $c^2 = 4m^2 + 1$ すなわち、 $c = \pm\sqrt{4m^2 + 1}$ となる事が分かります。

(2) 接線 $y = mx \pm \sqrt{4m^2 + 1}$ ($m \neq 0$) と直交する接線は、傾きが $-\frac{1}{m}$ である事から、

$$y = -\frac{1}{m}x \pm \sqrt{\frac{4}{m^2} + 1}$$

の2本である事が分かります。これらの直交する接線の交点は連立方程式：

$$\begin{cases} y = mx \pm \sqrt{4m^2 + 1} \\ y = -\frac{1}{m}x \pm \sqrt{\frac{4}{m^2} + 1} \end{cases}$$

の解になるわけですが、ちょっと変形して

$$\begin{cases} y - mx = \pm\sqrt{4m^2 + 1} \\ my + x = \pm\sqrt{4 + m^2} \end{cases}$$

両辺自乗して加えると

$$\begin{aligned} (y - mx)^2 + (my + x)^2 &= 5(m^2 + 1) \\ (1 + m^2)y^2 + (m^2 + 1)x^2 &= 5(m^2 + 1) \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}$$

となって、この交点は円周上にある事が分かります。

また、傾きが0あるいは ∞ の接線について考えると、傾き0の接線は

$$y = \pm 1$$

であり、これと直交するのが傾き ∞ の接線

$$x = \pm 2$$

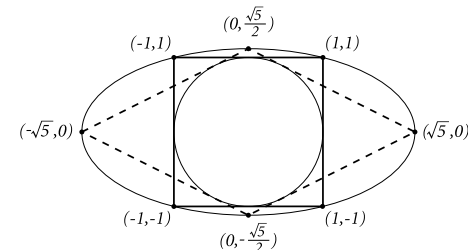
ですから、これらの交点もまた明らかにさっきの円周上にあります。

逆に、円周上の任意の点から問題の楕円に接線を引く事が出来るので、直交する接線の交点の全体は円周と一致します。□

発展演習 11 楕円 $x^2 + 4y^2 = 5$ とその内部にある円 $x^2 + y^2 = 1$ を考えます。楕円周上の勝手な点から出発して円に接線を引き、その接線が再び楕円周と交わった点からもう一度別の接線を引くのを繰り返すと、どこから出発しても4回で元の点に戻る事を証明して下さい。

【特別な場合】 y -軸に平行な接線は $x = \pm 1$ ですからこの直線と楕円の交点は $(\pm 1, \pm 1)$ です。つまり4点 $(\pm 1, \pm 1)$ を頂点とする正方形は楕円に内接し、円に外接しています。つまり点 $(1, 1)$ からスタートして接線を引けば4回で元の点に戻って来るわけです。

また、点 $(\sqrt{5}, 0)$ と点 $(0, \frac{\sqrt{5}}{2})$ を結ぶ直線は $x + 2y - \sqrt{5} = 0$ となりますが、今日学んだ単位円と直線の接する条件を満たしていますからこの直線



あとは対称性から考えれば、 $(\sqrt{5}, 0) \rightarrow (0, \frac{\sqrt{5}}{2}) \rightarrow (-\sqrt{5}, 0) \rightarrow (0, -\frac{\sqrt{5}}{2}) \rightarrow (\sqrt{5}, 0)$ と云う具合にやはり接線は4回で元の点に戻って来ます。

【楕円上の有理型パラメータ】 $(\cos \theta, \sin \theta)$ によって円周上の点を表す事が可能だった様に、楕円の方程式を標準的な形： $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{\frac{5}{4}} = 1$ に変形してやれば $(\sqrt{5} \cos \theta, \frac{\sqrt{5}}{2} \sin \theta)$ によってそれが楕円周上でも可能な事が分かりますが、3角関数を使っている時点で今回の様な代数的な方程式の計算との相性が良くありません。

しかし $\tan \frac{\theta}{2} = t$ と置けば、 $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1 + t^2}$ なので

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin \theta = 2 \tan \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

によって $\cos \theta, \sin \theta$ 共に t の有理式で表す事が出来て、楕円周上の点は一般に $(\sqrt{5} \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sqrt{5} \frac{t}{1+t^2})$ と言う風に書き表す事が出来ます。ただし、 $-\infty < t < \infty$ ですから楕円周上の点 $(-\sqrt{5}, 0)$ だけはこの方法では表す事は出来ないのですが、幸いこのケースは既に計算してありますのでここでは除外して良いでしょう。

【一般的な場合】 楕円周上に異なる3点

$$A\left(\frac{\sqrt{5}(1-a^2)}{1+a^2}, \frac{\sqrt{5}a}{1+a^2}\right), B\left(\frac{\sqrt{5}(1-b^2)}{1+b^2}, \frac{\sqrt{5}b}{1+b^2}\right), C\left(\frac{\sqrt{5}(1-c^2)}{1+c^2}, \frac{\sqrt{5}c}{1+c^2}\right)$$

を考えて、直線 AB, BC が共に円 $x^2 + y^2 = 1$ に接していると仮定しましょう。

接線が y -軸に平行な場合は最初に見ましたから、ここでは A と B 、 B と C では x -座標が異なっている場合のみ考えます ($\sqrt{5} \frac{1-b^2}{1+b^2} - \sqrt{5} \frac{1-a^2}{1+a^2} \neq 0$ など) し、 a, b, c は $0, \pm 1$ のいずれでもない場合を考えます (それらは既に計算済みの点に相当します)。

まず直線 AB の式ですが、これは

$$\begin{aligned} y - \sqrt{5} \frac{a}{1+a^2} &= \frac{\sqrt{5} \frac{b}{1+b^2} - \sqrt{5} \frac{a}{1+a^2}}{\sqrt{5} \frac{1-b^2}{1+b^2} - \sqrt{5} \frac{1-a^2}{1+a^2}} \left(x - \sqrt{5} \frac{1-a^2}{1+a^2} \right) \\ y &= \frac{ab-1}{2(a+b)} \left(x - \sqrt{5} \frac{1-a^2}{1+a^2} \right) + \sqrt{5} \frac{a}{1+a^2} \\ 2(a+b)(1+a^2)y &= (ab-1)(1+a^2)x + \sqrt{5}(a^3b+a^2+ab+1) \\ &= (ab-1)(1+a^2)x + \sqrt{5}(a^2+1)(ab+1) \\ 0 &= (ab-1)x - 2(a+b)y + \sqrt{5}(ab+1) \end{aligned}$$

となつて、この直線が円と接する条件は

$$(ab-1)^2 + 4(a+b)^2 = 5(ab+1)^2$$

となります。全く同様に直線 BC が円に接する条件も分かります：

$$(bc-1)^2 + 4(b+c)^2 = 5(bc+1)^2.$$

ここで2つの直線が円と接する条件に注目して、これらを b について整理すると

$$\begin{cases} (a^2-1)b^2 + ab + 1 - a^2 = 0 \\ (c^2-1)b^2 + cb + 1 - c^2 = 0 \end{cases}$$

となりますから、第1式に c^2-1 、第2式に a^2-1 を掛けて辺々引けば

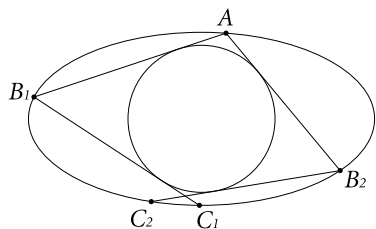
$$0 = ab(c^2-1) - cb(a^2-1) = abc(c-a) + b(c-a) = b(c-a)(ac+1)$$

から $ac+1=0$ である事が分かります ($b \neq 0, a \neq c$ に注意)。

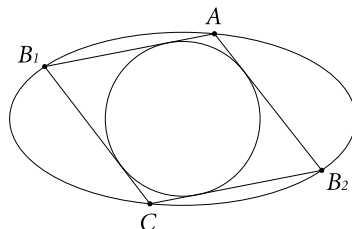
この最後の式に注目して下さい。3点 A, B, C が AB, BC が円に接すると云う条件を満たすならば $ac = -1$ でなければならないと言っているわけですが、これは A が決まれば B には依存せずに C がただ一つ決まってしまうと、そう言っているわけですね。

でも普通に考えて B の取り方は2通りある筈です。だって点 A から円への接線は2本引けますからね。で、どちらの場合にも、そこから更に接線を引いた場合、 C は同じ点になってしまうと、そう言っているわけですね。

これは、点 A から出発して順に円に接線を引いて行くと4回で元の点 A に戻って来ると云う事を示しています。



こんな風なる穢な気がするが...



実際に計算してみると、Aからどっちに接線を引いても次の接線が楕円周と交わる点は同じ点Cになってしまう。

□