

Classical triangle centers

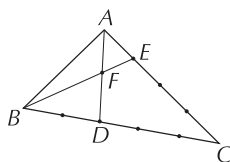
1 内分点の位置ベクトル

1.1 基本的な例題

例題 1.1 $\triangle ABC$ において次の問いに答えて下さい：

(1) 辺 BC を 2:3 に内分する点を D とした時、 $\vec{AD}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。

(2) 辺 CA を 3:1 に内分する点を E とし、線分 BE と線分 AD の交点を F とします。このとき点 F の位置ベクトル $\vec{OF}$ を 3 頂点の位置ベクトル $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ で表して下さい。



$$(1) \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{2}{5}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC}$$

(2) $\vec{AF}$ は $\vec{AD}$ の定数倍ですから、仮に $\vec{AF} = m\vec{AD}$ とおけば、(1) の結果から

$$\vec{AF} = \frac{3m}{5}\vec{AB} + \frac{2m}{5}\vec{AC} \quad (1.1)$$

である事が分かります。また、ベクトル $\vec{BF}$ はベクトル $\vec{BE}$ のやはり定数倍です。で、 $\vec{BF} = n\vec{BE}$ においてこれを変形すれば ($\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AC}$ に注意して)

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AB} + n(\vec{BA} + \vec{AE}) = (1-n)\vec{AB} + \frac{n}{4}\vec{AC} \quad (1.2)$$

です。従って、(1.1) と (1.2) 式によれば

$$\begin{aligned} \frac{3m}{5}\vec{AB} + \frac{2m}{5}\vec{AC} &= (1-n)\vec{AB} + \frac{n}{4}\vec{AC} \\ \left(\frac{3m}{5} + n - 1\right)\vec{AB} &= \left(-\frac{2m}{5} + \frac{n}{4}\right)\vec{AC} \end{aligned}$$

となるのですが、 $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ は平行ではなく、両辺の係数は 0 である事、即ち

$$\begin{cases} \frac{3}{5}m + n = 1 \\ -\frac{2}{5}m + \frac{1}{4}n = 0 \end{cases}$$

が得られます。第 2 式の 4 倍を第 1 式から引けば $\frac{11}{5}m = 1$ すなわち、 $m = \frac{5}{11}$ となつてこれを (1.1) に戻してやれば

$$\begin{aligned} \vec{AF} &= \frac{3}{11}\vec{AB} + \frac{2}{11}\vec{AC} \\ \vec{AO} + \vec{OF} &= \frac{3}{11}(\vec{AO} + \vec{OB}) + \frac{2}{11}(\vec{AO} + \vec{OC}) \\ \vec{OF} &= \frac{6}{11}\vec{OA} + \frac{3}{11}\vec{OB} + \frac{2}{11}\vec{OC} \end{aligned}$$

である事が分かります。

【別解】 P, Q が同一直線上にないとき、直線 PQ の (R を始点とした) パラメータ表示は

$$\vec{RX} = \vec{RP} + t\vec{PQ} = (1-t)\vec{RP} + t\vec{RQ}$$

です (t はパラメータ)。 $1-t=s$ と書けば次が成り立ちます：

事実 1.2 P, Q が同一直線上にないとき、点 X が直線 PQ 上にある条件：

$$\vec{RX} = s\vec{RP} + t\vec{RQ} \quad (s+t=1) \quad \text{と表せる}$$

点 X が線分 PQ 上にある条件：

$$\vec{RX} = s\vec{RP} + t\vec{RQ} \quad (s+t=1, s, t \geq 0) \quad \text{と表せる}$$

$\vec{CF}$ は $\vec{CA}$ と $\vec{CB}$ の一次結合で表されるので、

$$\vec{CF} = s\vec{CA} + t\vec{CB}$$

と置きます。

$$\vec{CF} = s\vec{CA} + t\vec{CB} = \frac{4s}{3}\vec{CE} + t\vec{CB}$$

であり、点 F は直線 BE 上にあるので

$$\frac{4s}{3} + t = 1 \cdots (*)$$

です。また

$$\vec{CF} = s\vec{CA} + t\vec{CB} = s\vec{CA} + \frac{5t}{3}\vec{CD}$$

であって、点 F は直線 AD 上にあるので

$$s + \frac{5t}{3} = 1 \cdots (**)$$

でもあります。(*), (**) を解けば、 $s = \frac{6}{11}, t = \frac{3}{11}$ ですから

$$\begin{aligned}\vec{CF} &= \frac{6}{11}\vec{CA} + \frac{3}{11}\vec{CB} \\ \vec{CO} + \vec{OF} &= \frac{6}{11}(\vec{CO} + \vec{OA}) + \frac{3}{11}(\vec{CO} + \vec{OB}) \\ \vec{OF} &= \frac{6}{11}\vec{OA} + \frac{3}{11}\vec{OB} + \frac{2}{11}\vec{OC}\end{aligned}$$

です。

□

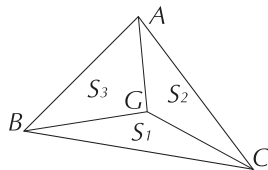
1.2 面積比と位置ベクトル

例題 1.3 三角形 ABC の内部に点 G があって、内部が3つの三角形に分割されています。これらの三角形の面積がそれぞれ、

$$(\triangle CGB \text{ の面積}) = S_1,$$

$$(\triangle AGC \text{ の面積}) = S_2,$$

$$(\triangle BGA \text{ の面積}) = S_3$$



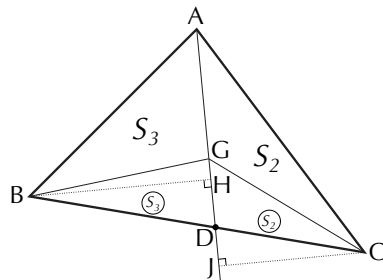
である時に点 G の位置ベクトルは次のようになる事を証明して下さい：

$$\vec{OG} = \frac{S_1\vec{OA} + S_2\vec{OB} + S_3\vec{OC}}{S_1 + S_2 + S_3}.$$

【証明】 直線 AG と辺 BC との交点を D とし、また、直線 AG へ B, C から下ろした垂線の足をそれぞれ H, J とします。

すると2つの三角形 $\triangle ABG, \triangle AGC$ の面積比を共通の底辺 AG による高さの比と見れば、 $BH : CJ = S_3 : S_2$ であり、これを今度は2つの相似な三角形 $\triangle BDH, \triangle CDJ$ の斜辺の比と見れば $BD : DC = S_3 : S_2$ が分かります。

同様に直線 BG を延ばして辺 CA との交点を E とすると、 $CE : EA = S_1 : S_3$ となっています。



ここで

$$\vec{CG} = s\vec{CA} + t\vec{CB}$$

と置くと、

$$\vec{CG} = s\vec{CA} + t\vec{CB} = s\vec{CA} + \frac{s_2 + s_3}{s_2}t\vec{CD}$$

であって、点 G は直線 AD 上にありますから

$$s + \frac{s_2 + s_3}{s_2}t = 1 \cdots (*)$$

であり、また、

$$\vec{CG} = s\vec{CA} + t\vec{CB} = \frac{s_3 + s_1}{s_1}s\vec{CE} + t\vec{CB}$$

であって、点 G は直線 BE 上にありますから

$$\frac{s_3 + s_1}{s_1}s + t = 1 \cdots (**)$$

でもあり、これらを解けば、

$$s = \frac{s_1}{s_1 + s_2 + s_3}, \quad t = \frac{s_2}{s_1 + s_2 + s_3}$$

なので、

$$\begin{aligned}\vec{CG} &= \frac{s_1}{s_1 + s_2 + s_3}\vec{CA} + \frac{s_2}{s_1 + s_2 + s_3}\vec{CB} \\ \vec{CO} + \vec{OG} &= \frac{s_1}{s_1 + s_2 + s_3}(\vec{CO} + \vec{OA}) + \frac{s_2}{s_1 + s_2 + s_3}(\vec{CO} + \vec{OB}) \\ \vec{OG} &= \frac{S_1\vec{OA} + S_2\vec{OB} + S_3\vec{OC}}{S_1 + S_2 + S_3}\end{aligned}$$

となって題意は証明されます。

□

$$\vec{OG} = \frac{S_1\vec{OA} + S_2\vec{OB} + S_3\vec{OC}}{S_1 + S_2 + S_3} \quad \text{なので、最後の結論の式から}$$

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \vec{OG} - \frac{S_1\vec{OA} + S_2\vec{OB} + S_3\vec{OC}}{S_1 + S_2 + S_3} \\ &= \frac{S_1(\vec{OG} - \vec{OA}) + S_2(\vec{OG} - \vec{OB}) + S_3(\vec{OG} - \vec{OC})}{S_1 + S_2 + S_3} \\ \vec{0} &= S_1\vec{AG} + S_2\vec{BG} + S_3\vec{CG}\end{aligned}$$

が成り立っていることも分かります。

2 Classical triangle centers

『三角形の中心』と言うと『三角形に中心なんてあったっけ??』と思うかも知れませんが、重心、内心など『中心』を匂わせるものを幾つか知っている筈です。

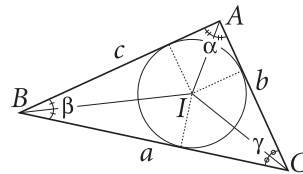
歴史的に言えば、三角形の中心と云うものは三角形にまつわる『ある3直線の交点』や『ある円の中心』などの事を言いますが、現代ではある種の対称性に関係した難しい定義があって、50000種以上の点が『Encyclopedia of triangle centers (ETC)』に登録されています (<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/etc.html>)。

ここでは前節の分割面積比を基にした位置ベクトルの計算式を使って ETC のリストの最上位にある所謂『classical triangle centers』4点の位置ベクトルを求めてみます。

2.1 Incenter (内心)

三角形の内接円の中心は、丁度各頂点角の2等分線3本の交点になっています。この点 I を内心 (Incenter) と言います。

内心から各辺に垂線を下ろせばそれは内接円の半径ですから全て長さが等しい事が分かります。従って3分割された3つの三角形の面積比は(高さが等しいので)底辺、つまり三角形の3辺の長さの比になります。



従って3辺の長さ a, b, c が分かっている様な場合には位置ベクトルは

$$\vec{OI} = \frac{a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC}}{a + b + c}$$

と書く事が出来ます。

辺の長さが分からなくても頂点角 α, β, γ が分かっているれば、正弦定理から

$$BC : CA : AB = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

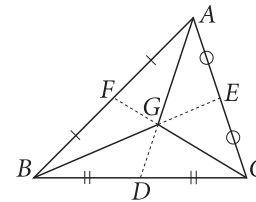
ですので、3つの三角形の面積比は

$$(\triangle IBC \text{ の面積}) : (\triangle ICA \text{ の面積}) : (\triangle IAB \text{ の面積}) = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

であることが分かり、内心 I の位置ベクトルは次の形で書く事が出来ます：

$$\vec{OI} = \frac{\sin \alpha \vec{OA} + \sin \beta \vec{OB} + \sin \gamma \vec{OC}}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}.$$

2.2 Centroid (重心)



三角形 ABC の頂点 A, B と対辺の中点 D, E を線分で結び、その2本の線分の交点を G とします (左図参照)。このときまず $\triangle ABD$ と $\triangle ADC$ に注目すれば、これらは底辺が同じ長さであってかつ高さも同じなので面積が等しい事が分かります。同様に $\triangle GBD$ と $\triangle GDC$ も同じ面積ですから、差をとれば $\triangle ABG$ と $\triangle AGC$ は同じ面積であることが分かります。

全く同様にして $\triangle ABG$ と $\triangle GBC$ も同じ面積であることが分かりますから、結局のところ3つの三角形 $\triangle ABG, \triangle AGC, \triangle GBC$ は全て同じ面積であることが分かります。

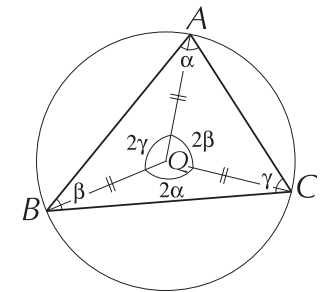
これは逆に点 F が辺 AB の中点であることを意味しますから、三角形 ABC の各頂点から対辺の中点へと伸ばした3本の直線は1点で交わることが分かりました。この交点 G の事を三角形 ABC の重心 (Centroid) と言い、その位置ベクトルは今見た面積比から明らかに次の通りになっています：

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}.$$

2.3 Circumcenter (外心)

三角形の外接円の中心 Q は外心 (Circumcenter) と呼ばれており、これは明らかに各辺の垂直2等分線3本が1点で交わった交点にもなっています。外心は三角形の外部に出てしまう事もありますが、ここでは内部にある場合を考える事にしましょう。

各頂点と外心を結んで3分割したとき、それらは全て2等辺三角形であって斜辺の長さは全て等しく、頂点角 (あるいは底辺) だけが異なります。



図の様にそれぞれの頂点角は底辺の対頂点角の倍角になっており、外接円の半径を R とすれば、例えば $\triangle QBC$ の面積は $\frac{1}{2}R^2 \sin 2\alpha$ などとなりますので、面積比は頂点角の倍角の sine の比になります：

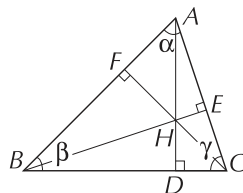
$$(\triangle QBC \text{ の面積}) : (\triangle QCA \text{ の面積}) : (\triangle QAB \text{ の面積}) = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma$$

従って、外心 Q の位置ベクトルは次のようになる筈です：

$$\vec{OQ} = \frac{\sin 2\alpha \vec{OA} + \sin 2\beta \vec{OB} + \sin 2\gamma \vec{OC}}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}.$$

2.4 Orthocenter (垂心)

三角形の3頂点 A, B, C の角度をそれぞれ α, β, γ と
して、2頂点 A, B から対辺に向かって下ろした垂線
の足をそれぞれ D, E とします。ここではこの2本の
垂線が特に三角形の内部で交わる場合を考え、その交
点を H とします。



線分 AD の長さを AD と書く事にすると、 $\frac{AD}{BD} = \tan \beta$, $\frac{AD}{CD} = \tan \gamma$ なので

$$\frac{BD}{CD} = \frac{\tan \gamma}{\tan \beta} \quad \text{すなわち} \quad BD : CD = \tan \gamma : \tan \beta$$

となっている事が分かります。すると底辺 BC の等しい三角形 $\triangle HAB, \triangle HCA$ の面
積比は高さの比 $\tan \gamma : \tan \beta$ となっている事が分かります。全く同様にして

$$(\triangle HBC \text{ の面積}) : (\triangle HAB \text{ の面積}) = \tan \alpha : \tan \gamma$$

も分かりますから、これらを合わせれば

$$(\triangle HBC \text{ の面積}) : (\triangle HCA \text{ の面積}) : (\triangle HAB \text{ の面積}) = \tan \alpha : \tan \beta : \tan \gamma$$

であることが分かります。

しかしこれは特に $(\triangle HBC \text{ の面積}) : (\triangle HCA \text{ の面積}) = \tan \alpha : \tan \beta$ を意味しま
すから、直線 CH と辺 AB はその交点 F で直交することも分かります。

以上から各頂点から対辺へ下ろした3垂線が1点で交わる事が分かりますが、この交
点 H は垂心 (Orthocenter) と呼ばれます。今見た面積比から垂心 H の位置ベクター
は次の通りです：

$$\vec{OH} = \frac{\tan \alpha \vec{OA} + \tan \beta \vec{OB} + \tan \gamma \vec{OC}}{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma}.$$

ここでは内部にある場合のみを考えましたが、前節の面積比による位置ベクターの
式を点 G が三角形の外部にある場合にも証明してしまえば同様に計算されます。

Exercise

基本演習 1 $\triangle ABC$ において次の問いに答えて下さい：

- (1) 辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とした時、 $\vec{AD}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。
- (2) 辺 CA を $2:3$ に内分する点を E とし、線分 BE と線分 AD の交点を F とします。このとき $\vec{OF}$ を $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ で表して下さい。

基本演習 2 $\triangle ABC$ の辺 AB の中点を M 、 MC の中点を D とし、辺 BC を $2:1$ に内分する点を E とすれば、3 点 A, D, E は 1 直線上にあることを証明して下さい。

基本演習 3 平行四辺形 $ABCD$ において、対角線 BD を $3:2$ に内分する点を E 、辺 CD を $1:2$ に内分する点を F とするとき、3 点 A, E, F は同一直線上にあることを示して下さい。

基本演習 4 3 角形 ABC に於いて、辺 BC 上に点 D があって、3 角形 ABD の面積が R 、3 角形 ADC の面積が S であるとし、

- (1) $BD:DC$ を求めて下さい。
- (2) $\vec{AD}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。

基本演習 5 3 角形 ABC に於いて、頂点 A の角 ($\angle CAB$) の 2 等分線が辺 BC と交わる点を D とし、各辺の長さが $AB = l, AC = m$ であったとします。

- (1) $BD:DC$ を求めて下さい。
- (2) $\vec{AD}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。

基本演習 6 三角形 ABC の頂点 A から対辺に向かって引いた垂線の足を D とし、 $\angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma$ であるとし、

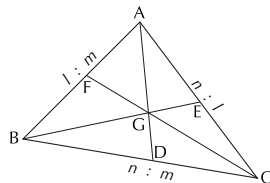
- (1) $BD:DC$ を求めて下さい。
- (2) $\vec{AD}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。

基本演習 7 (1) 図の三角形において

$$BD:DC = n:m, \quad CE:EA = l:n$$

が成り立っているとき、 $AF:FB = m:l$ が成り立っていることを示して下さい。

- (2) $\vec{OG}$ を $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ で表して下さい。



発展演習 8 $\triangle ABC$ の内部に点 P があって $2\vec{AP} + 3\vec{BP} + 4\vec{CP} = \vec{0}$ が成り立っているとし、線分 AP の延長線と辺 BC の交点を Q とします。

- (1) $\vec{AP}$ を $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ を用いて表して下さい。
- (2) $BQ:QC, AP:PQ$ を求めて下さい。
- (3) 面積比 $\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB$ を求めて下さい。

発展演習 9 今日やった例題 1.3 は、点 G が三角形の辺の上や外部にある場合にも成り立つでしょうか？ 考えてみて下さい。

基本演習 10 $s > 1, 0 < t < 1, 0 < u < 1$ とします。

三角形 ABC の辺 AB を $s:(s-1)$ に外分する点を S 、辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を T 、辺 CA を $u:(1-u)$ に内分する点を U とします。

このとき 3 点 S, T, U が同一直線上にあるために必要十分条件は

$$\frac{(s-1)(t-1)(u-1)}{stu} = 1$$

であること (Μενέλαος (メネラウス) の定理) を証明して下さい。

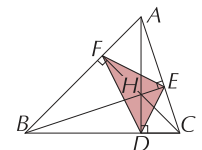
基本演習 11 三角形の 3 頂点角が α, β, γ のとき次が成り立つことを示して下さい：

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

発展演習 12 三角形の垂心・外心・重心は一直線上にある事を証明して下さい。この直線を Euler 線と言います (L.Euler, 1767)。

発展演習 13 $\triangle ABC$ の各頂点から対辺に下ろした垂線の足を D, E, F とし、3 垂線の交点、即ち垂心を H とします。このとき H は $\triangle DEF$ の内心であることを証明して下さい。



発展演習 14 三角形の各辺の中点を通る円の中心は元の三角形の外心と垂心の中点であることを示して下さい。

発展演習 15 三角形の各辺の中点を通る円は、各頂点から対辺に下ろした垂線の足、垂心と各頂点の中点の合計 6 点も通ることを示して下さい。

Exercise 解答例

基本演習 1 $\triangle ABC$ において次の問いに答えて下さい：

- (1) 辺 BC を 1:2 に内分する点を D とした時、 $\vec{AD}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。
 (2) 辺 CA を 2:3 に内分する点を E とし、線分 BE と線分 AD の交点を F とします。このとき $\vec{OF}$ を $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ で表して下さい。

(1)

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$$

(2) ベクトル $\vec{AF}$ はベクトル $\vec{AD}$ の定数倍なので、仮に $\vec{AF} = m\vec{AD}$ とおけば、(1) の結果から

$$\vec{AF} = \frac{2m}{3}\vec{AB} + \frac{m}{3}\vec{AC} \quad \dots (*)$$

です。また、ベクトル $\vec{BF}$ はベクトル $\vec{BE}$ のやはり定数倍なので、 $\vec{BF} = n\vec{BE}$ において此れを変形すれば

$$\begin{aligned} \vec{BA} + \vec{AF} &= n(\vec{BA} + \vec{AE}) \\ \vec{AF} &= (1-n)\vec{AB} + n\vec{AE} = (1-n)\vec{AB} + \frac{3n}{5}\vec{AC} \quad \dots (**) \end{aligned}$$

です。従って、(*) と (**) 式によれば

$$\begin{aligned} \frac{2m}{3}\vec{AB} + \frac{m}{3}\vec{AC} &= (1-n)\vec{AB} + \frac{3n}{5}\vec{AC} \\ \left(\frac{2m}{3} + n - 1\right)\vec{AB} &= \left(-\frac{m}{3} + \frac{3n}{5}\right)\vec{AC} \end{aligned}$$

ですが、 $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ は平行ではなく、両辺の係数は 0 である事、即ち連立方程式：

$$\begin{cases} \frac{2}{3}m + n = 1 \\ -\frac{1}{3}m + \frac{3}{5}n = 0 \end{cases}$$

が得られます。ここで第2式の2倍と第1式を足せば $\frac{11}{5}n = 1$ すなわち、 $n = \frac{5}{11}$ となってこれを (**) に戻してやれば

$$\begin{aligned} \vec{AF} &= \frac{6}{11}\vec{AB} + \frac{3}{11}\vec{AC} \\ \vec{AO} + \vec{OF} &= \frac{6}{11}(\vec{AO} + \vec{OB}) + \frac{3}{11}(\vec{AO} + \vec{OC}) \\ \vec{OF} &= \frac{2}{11}\vec{OA} + \frac{6}{11}\vec{OB} + \frac{3}{11}\vec{OC} \end{aligned}$$

である事が分かります。

【別解その1】

$$\vec{CF} = s\vec{CA} + t\vec{CB}$$

とします。

まず

$$\vec{CF} = s\vec{CA} + t\vec{CB} = s\vec{CA} + \frac{3}{2}t\vec{CD}$$

であって、点 F は直線 AD 上にありますから

$$s + \frac{3}{2}t = 1 \quad \dots (*)$$

であり、また、

$$\vec{CF} = s\vec{CA} + t\vec{CB} = \frac{5}{2}s\vec{CE} + t\vec{CB}$$

であって、点 F は直線 BE 上にありますから

$$\frac{5}{2}s + t = 1 \quad \dots (**)$$

です。これらを解けば

$$s = \frac{2}{11}, t = \frac{6}{11}$$

ですから、

$$\begin{aligned} \vec{CF} &= \frac{2}{11}\vec{CA} + \frac{6}{11}\vec{CB} \\ \vec{CO} + \vec{OF} &= \frac{2}{11}(\vec{CO} + \vec{OA}) + \frac{6}{11}(\vec{CO} + \vec{OB}) \\ \vec{OF} &= \frac{2}{11}\vec{OA} + \frac{6}{11}\vec{OB} + \frac{3}{11}\vec{OC} \end{aligned}$$

です。

【別解その2】 $BD : DC = 1 : 2$ なので $\triangle ABF : \triangle CAF = 1 : 2$ です。また、 $CE : EA = 2 : 3$ ですから、 $\triangle BCF : \triangle ABF = 2 : 3$ です。

従って

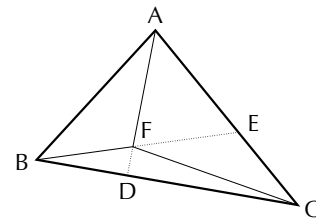
$$\triangle BCF : \triangle CAF : \triangle ABF = 2 : 6 : 3$$

が分かりますから、例題 1.2 の結果から

$$\vec{OF} = \frac{2\vec{OA} + 6\vec{OB} + 3\vec{OC}}{11}$$

です。

□



基本演習 2 $\triangle ABC$ の辺 AB の中点を M 、 MC の中点を D とし、辺 BC を 2:1 に内分する点を E とすれば、3 点 A, D, E は 1 直線上にあることを証明して下さい。

$$\begin{aligned}\vec{AD} &= \vec{AM} + \vec{MD} \\ &= \vec{AM} + \frac{1}{2}\vec{MC} \\ &= \vec{AM} + \frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{AC}) \\ &= \frac{1}{2}\vec{AM} + \frac{1}{2}\vec{AC} \\ &= \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}\end{aligned}$$

である一方、

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$$

であり、丁度 $\frac{4}{3}\vec{AD} = \vec{AE}$ となっているため、3 点 A, D, E は同一直線上にある事が分かります。

【別解】

$$\begin{aligned}\vec{BD} &= \vec{BM} + \vec{MD} \\ &= \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{MC} \\ &= \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}(\vec{BC} - \vec{BM}) \\ &= \frac{1}{4}\vec{BA} + \frac{3}{4}\vec{BC}\end{aligned}$$

であり、 $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ なので、点 D は直線 MC 上にあります。

□

基本演習 3 平行四辺形 $ABCD$ において、対角線 BD を 3:2 に内分する点を E 、辺 CD を 1:2 に内分する点を F とするとき、3 点 A, E, F は同一直線上にあることを示して下さい。

$$\vec{DE} = \frac{2}{5}\vec{DB} = \frac{2}{5}(\vec{DA} + \vec{DC}) = \frac{2}{5}\vec{DA} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2}\vec{DF} = \frac{2}{5}\vec{DA} + \frac{3}{5}\vec{DF}$$

であって、 $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$ ですから、点 E は線分 AF 上にあります。

□

基本演習 4 3 角形 ABC に於いて、辺 BC 上に点 D があって、3 角形 ABD の面積が R 、3 角形 ADC の面積が S であるとしします。

(1) $BD : DC$ を求めて下さい。 (2) $\vec{AD}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。

(1) 2 つの三角形 $\triangle ABD, \triangle ADC$ は、それぞれの底辺が AD, DC だとすると高さは同じです。従って面積の比は底辺の比に等しい事が分かり、求める比は $R : S$ です。

(2) 他にも同様の事を書きましたので省略します。

□

基本演習 5 3 角形 ABC に於いて、頂点 A の角 ($\angle CAB$) の 2 等分線が辺 BC と交わる点を D とし、各辺の長さが $AB = l, AC = m$ であったとしします。

(1) $BD : DC$ を求めて下さい。 (2) $\vec{AD}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。

(1) 頂点 A の角の半分を θ とします。2 つの三角形 $\triangle ABD, \triangle ADC$ は共通の底辺が AD だと考えると高さはそれぞれ $AB \sin \theta, AC \sin \theta$ です。従って面積比は $AB : AC$ すなわち $l : m$ である事が分かります。

今度は見方を変えて、同じ 2 つの三角形のそれぞれの底辺が BD, DC だと考えると、今度はこれらの三角形は共通の高さを持っています。従って面積比は底辺の比に等しい事が分かり、求める比は $l : m$ です。

(2) 他にも同様の事を書きましたので省略します。

□

基本演習 6 三角形 ABC の頂点 A から対辺に向かって引いた垂線の足を D とし、 $\angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma$ であるとしします。

(1) $BD : DC$ を求めて下さい。 (2) $\vec{AD}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。

(1) $\frac{AD}{BD} = \tan \beta, \frac{AD}{DC} = \tan \gamma$ なので

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\tan \gamma}{\tan \beta} \quad \text{すなわち} \quad BD : DC = \tan \gamma : \tan \beta$$

となっています。

(2) 他にも同様の事を書きましたので省略します。

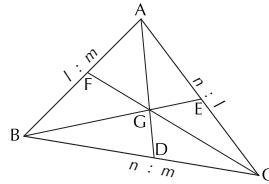
□

基本演習 7 (1) 図の三角形において

$$BD : DC = n : m, \quad CE : EA = l : n$$

が成り立っているとき、 $AF : FB = m : l$ が成り立っていることを示して下さい。

(2) $\vec{OG}$ を $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ で表して下さい。



(1) $BD : DC = n : m$ より、 $\triangle BDG : \triangle DCG = \triangle BDA : \triangle DCA = n : m$ であって、従って $\triangle ABG : \triangle CAG = n : m$ です。

全く同様に $CE : EA = l : n$ より $\triangle BCG : \triangle ABG = l : n$ でもありますから、 $\triangle CAG : \triangle BCG = m : l$ となり、 $AF : FB = m : l$ が分かります。

(2) 今日の結果 (例題 1.2) によれば

$$\vec{OG} = \frac{l\vec{OA} + m\vec{OB} + \vec{OC}}{l + m + n}$$

です。

□

発展演習 8 $\triangle ABC$ の内部に点 P があって $2\vec{AP} + 3\vec{BP} + 4\vec{CP} = \vec{0}$ が成り立っているとし、線分 AP の延長線と辺 BC の交点を Q とします。

(1) $\vec{AP}$ を $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ を用いて表して下さい。

(2) $BQ : QC, AP : PQ$ を求めて下さい。

(3) 面積比 $\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB$ を求めて下さい。

(1)

$$\begin{aligned} 2\vec{AP} + 3\vec{BP} + 4\vec{CP} &= \vec{0} \\ 2\vec{AP} + 3(\vec{BA} + \vec{AP}) + 4(\vec{CA} + \vec{AP}) &= \vec{0} \\ 9\vec{AP} &= 3\vec{AB} + 4\vec{AC} \\ \vec{AP} &= \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{4}{9}\vec{AC} \end{aligned}$$

(2)

$$\vec{AP} = \frac{3}{9}\vec{AB} + \frac{4}{9}\vec{AC} = \frac{7}{9}\left(\frac{3}{7}\vec{AB} + \frac{4}{7}\vec{AC}\right)$$

と書けるので、線分 AP を $\frac{9}{7}$ 倍延長すると辺 BC を 4:3 に内分する点に一致する事が分かり、これが点 Q です。

従って、 $BQ : QC = 4 : 3$ であって、 $AP : PQ = 7 : 2$ となります。

(3) 2つの三角形 $\triangle PAB, \triangle PCA$ を比較すると、共通の底辺 AP を持つと考えれば面積の比は高さの比になりますが、この高さの比は矢張り同じ底辺 AQ を持つ2つの三角形 $\triangle ABQ, \triangle AQC$ の面積比と等しくなっています。

しかし、この比はそれぞれの底辺が BQ, QC であると考えた時に、高さが同じである事から底辺の比と等しい事が分かるので、結局面積比は (2) で求めた 4:3 になっている筈です。そこで $\triangle PAB$ の面積を S とすると、 $\triangle PCA = \frac{3}{4}S$ です。

次に $\triangle PAB, \triangle PBQ$ に注目して、それぞれの底辺が AP, PQ であると考えたと高さが同じですから、面積比は底辺の長さの比となり、それは (2) で求めた様に 7:2 です。従って、 $\triangle PBQ = \frac{2}{7}S$ である事が分かりました。

全く同様に $\triangle PCA, \triangle PQC$ に注目して面積比を計算すると同様に 7:2 ですから、 $\triangle PQC = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4}S = \frac{3}{14}S$ である事が分かります。

以上により、

$$\triangle PBC = \triangle PBQ + \triangle PQC = \frac{2}{7}S + \frac{3}{14}S = \frac{1}{2}S$$

となるので、結局求める3つの三角形の面積比は

$$\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} : 1 = 2 : 3 : 4$$

となる事が分かりました。

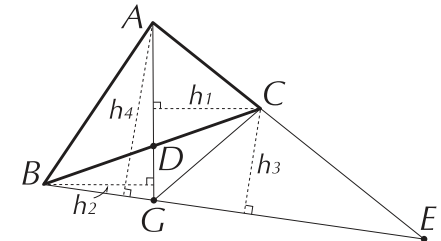
□

発展演習 9 今日やった例題 1.2 は、点 G が三角形の辺の上や外部にある場合にも成り立つでしょうか？ 考えてみて下さい。

簡単のために下図の様な位置関係の場合で、面積比が

$$\triangle GCB : \triangle GCA : \triangle GAB = S_1 : S_2 : S_3$$

であるとしましょう。



まず、 $\triangle GCA : \triangle GAB = S_2 : S_3$ から、AG を共通底辺と考えれば面積比は高さの比となり、

$$h_1 : h_2 = S_2 : S_3$$

が分かります。するとこの比から、AD を共通底辺と考えて

$$\triangle DCA : \triangle DAB = h_1 : h_2 = S_2 : S_3$$

となりますが、同じ三角形において今度はそれぞれの底辺を BD, DC と考えれば、これらは高さが等しいので面積比は底辺の比に一致して

$$BD : DC = S_3 : S_2$$

であることが分かります。従って

$$\vec{AD} = \frac{S_2 \vec{AB} + S_3 \vec{AC}}{S_2 + S_3}$$

となっています。

次に $\triangle GAB : \triangle GCB = S_3 : S_1$ から、 BG を共通底辺と考えれば面積比は高さの比となり、

$$h_4 : h_3 = S_3 : S_1$$

が分かります。するとこの比から、 BE を共通底辺と考えて

$$\triangle ABE : \triangle CBE = h_4 : h_3 = S_3 : S_1$$

となります。ここで

$$\triangle ABE - \triangle GAB = \triangle GEA, \quad \triangle CBE - \triangle GCB = \triangle GEC$$

に注意すれば

$$\triangle GEA : \triangle GEC = S_3 : S_1$$

となりますが、同じ三角形において今度はそれぞれの底辺を AE, CE と考えれば、これらは高さが等しいので面積比は底辺の比に一致して

$$AE : CE = S_3 : S_1$$

であることが分かります。従って

$$\vec{BE} = \frac{-S_1 \vec{BA} + S_3 \vec{BC}}{-S_1 + S_3}$$

となっています。

そこで、 $\vec{AG} = n\vec{AD}, \vec{BG} = m\vec{BE}$ と置けば、

$$\vec{BG} = m\vec{BE} = \frac{-S_1 m}{-S_1 + S_3} \vec{BA} + \frac{S_3 m}{-S_1 + S_3} \vec{BC}$$

あるいは

$$\begin{aligned} \vec{AG} &= n\vec{AD} \\ \vec{AB} + \vec{BG} &= \frac{S_2 n}{S_2 + S_3} \vec{AB} + \frac{S_3 n}{S_2 + S_3} \vec{AC} \\ \vec{BG} &= \left(\frac{S_2 n}{S_2 + S_3} - 1 \right) \vec{AB} + \frac{S_3 n}{S_2 + S_3} (\vec{AB} + \vec{BC}) \\ &= (n-1) \vec{AB} + \frac{S_3 n}{S_2 + S_3} \vec{BC} \\ &= (1-n) \vec{BA} + \frac{S_3 n}{S_2 + S_3} \vec{BC} \end{aligned}$$

と云う具合に $\vec{BG}$ を 2 通りに書き表す事が出来、これによって

$$\frac{-S_1 m}{-S_1 + S_3} \vec{BA} + \frac{S_3 m}{-S_1 + S_3} \vec{BC} = (1-n) \vec{BA} + \frac{S_3 n}{S_2 + S_3} \vec{BC}$$

$$\left(\frac{-S_1 m}{-S_1 + S_3} + n - 1 \right) \vec{BA} = \left(-\frac{S_3 m}{-S_1 + S_3} + \frac{S_3 n}{S_2 + S_3} \right) \vec{BC}$$

が得られますが、2つのベクトル $\vec{BA}, \vec{BC}$ は平行ではないので係数は両辺とも 0 になってなければいけない事になり、連立方程式

$$\begin{cases} \frac{-S_1 m}{-S_1 + S_3} + n - 1 = 0 \\ -\frac{S_3 m}{-S_1 + S_3} + \frac{S_3 n}{S_2 + S_3} = 0 \end{cases}$$

が得られ、これを解けば $m = \frac{S_3 - S_1}{-S_1 + S_2 + S_3}, n = \frac{S_2 + S_3}{-S_1 + S_2 + S_3}$ が分かります。これを戻せば

$$\begin{aligned} \vec{BG} &= \frac{-S_1}{-S_1 + S_2 + S_3} \vec{BA} + \frac{S_3}{-S_1 + S_2 + S_3} \vec{BC} \\ \vec{BO} + \vec{OG} &= \frac{-S_1}{-S_1 + S_2 + S_3} (\vec{BO} + \vec{OA}) + \frac{S_3}{-S_1 + S_2 + S_3} (\vec{BO} + \vec{OC}) \\ \vec{OG} &= \frac{-S_1 \vec{OA} + S_2 \vec{OB} + S_3 \vec{OC}}{-S_1 + S_2 + S_3} \end{aligned}$$

となる事が分かります。

この様に、点 G が三角形の外部にある時は、あたかも“負の面積”をもつ三角形を考えているかの様な結果になります。これは外分点の位置ベクトルの時と似た状況ですね。

点 G が辺の上にあたり辺の延長線上にあたりする時はどうなるか、考えてみて下さい。 □

基本演習 10 $s > 1, 0 < t < 1, 0 < u < 1$ とします。

三角形 ABC の辺 AB を $s : (s-1)$ に外分する点を S 、辺 BC を $t : (1-t)$ に内分する点を T 、辺 CA を $u : (1-u)$ に内分する点を U とします。

このとき 3 点 S, T, U が同一直線上にあるために必要十分条件は

$$\frac{(s-1)(t-1)(u-1)}{stu} = 1$$

であること (Μενέλαος(メネラウス)の定理) を証明してください。

$$\vec{AS} = s\vec{AB}, \quad \vec{AU} = (1-u)\vec{AC}$$

ですから、

$$\vec{AT} = v\vec{AS} + w\vec{AU}$$

と置けば、

$$\vec{AT} = vs\vec{AB} + w(1-u)\vec{AC}$$

です。問題文によれば $BT : TC = t : 1 - t$ ですから、

$$vs = 1 - t, \quad w(1 - u) = t$$

であって、

$$v = \frac{1 - t}{s}, \quad w = \frac{t}{1 - u}$$

が分かります。

点 T が直線 SU 上にあるための条件は $v + w = 1$ でしたから、これを变形すると

$$\begin{aligned} \frac{1 - t}{s} + \frac{t}{1 - u} &= 1 \\ (1 - t)(1 - u) + st &= s(1 - u) \end{aligned}$$

となり、これは

$$\frac{s - 1}{s} \cdot \frac{t - 1}{t} \cdot \frac{u - 1}{u} = 1$$

を变形したものに一致しています。

□

基本演習 11 三角形の 3 頂点角が α, β, γ のとき次が成り立つことを示してください：

$$\begin{aligned} \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma &= \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma \\ \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &= 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \end{aligned}$$

$\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ ですから、

$$\tan \gamma = \tan(\pi - (\alpha + \beta)) = -\tan(\alpha + \beta)$$

であって、

$$\begin{aligned} \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma &= \tan \alpha + \tan \beta - \tan(\alpha + \beta) \\ &= \tan(\alpha + \beta)(1 - \tan \alpha \tan \beta) - \tan(\alpha + \beta) \\ &= -\tan \alpha \tan \beta \tan(\alpha + \beta) \\ &= \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma \end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &= \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2(\pi - (\alpha + \beta)) \\ &= \sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2(\alpha + \beta) \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \beta \cos \beta + 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \beta \cos \beta \\ &\quad + 2(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\ &= 4 \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta + 4 \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \\ &= 4 \sin \alpha \sin \beta (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \end{aligned}$$

$$= 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

でもあります。

□

発展演習 12 三角形の垂心・外心・重心は一直線上にある事を証明して下さい。この直線を Euler 線と言います (L.Euler, 1767)。

三角形 ABC の垂心を H 、外心を Q 、重心を G として、ベクトル $\vec{GH}$ およびベクトル $\vec{GQ}$ を計算してこれらが平行なら 3 点は同一直線上にある事になります。

α, β, γ を三角形 ABC の 3 つの頂点角とすると、和は π なので実は

$$\begin{aligned} \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma &= \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma \\ \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &= 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \end{aligned}$$

が成り立ちます。これらを使えば、

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= \frac{\cos \alpha}{2 \sin \beta \sin \gamma} \vec{OA} + \frac{\cos \beta}{2 \sin \gamma \sin \alpha} \vec{OB} + \frac{\cos \gamma}{2 \sin \alpha \sin \beta} \vec{OC} \\ \vec{OH} &= \frac{1}{\tan \beta \tan \gamma} \vec{OA} + \frac{1}{\tan \gamma \tan \alpha} \vec{OB} + \frac{1}{\tan \alpha \tan \beta} \vec{OC} \\ &= \frac{\cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} \vec{OA} + \frac{\cos \gamma \cos \alpha}{\sin \gamma \sin \alpha} \vec{OB} + \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \vec{OC} \end{aligned}$$

とも書ける事に注意しておきます。すると、

$$\vec{GH} = \vec{OH} - \vec{OG}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} \vec{OA} + \frac{\cos \gamma \cos \alpha}{\sin \gamma \sin \alpha} \vec{OB} + \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \vec{OC} - \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3} \\ &= \left(\frac{\cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} - \frac{1}{3} \right) \vec{OA} + \left(\frac{\cos \gamma \cos \alpha}{\sin \gamma \sin \alpha} - \frac{1}{3} \right) \vec{OB} + \left(\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} - \frac{1}{3} \right) \vec{OC} \\ &= \frac{3 \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma}{3 \sin \beta \sin \gamma} \vec{OA} \\ &\quad + \frac{3 \cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha}{3 \sin \gamma \sin \alpha} \vec{OB} + \frac{3 \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{3 \sin \alpha \sin \beta} \vec{OC} \end{aligned}$$

である一方、

$$\begin{aligned} \vec{GQ} &= \vec{OQ} - \vec{OG} \\ &= \frac{\cos \alpha}{2 \sin \beta \sin \gamma} \vec{OA} + \frac{\cos \beta}{2 \sin \gamma \sin \alpha} \vec{OB} + \frac{\cos \gamma}{2 \sin \alpha \sin \beta} \vec{OC} - \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3} \\ &= \left(\frac{\cos \alpha}{2 \sin \beta \sin \gamma} - \frac{1}{3} \right) \vec{OA} + \left(\frac{\cos \beta}{2 \sin \gamma \sin \alpha} - \frac{1}{3} \right) \vec{OB} + \left(\frac{\cos \gamma}{2 \sin \alpha \sin \beta} - \frac{1}{3} \right) \vec{OC} \end{aligned}$$

ですが通分して $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ によれば

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3 \cos \alpha - 2 \sin \beta \sin \gamma}{6 \sin \beta \sin \gamma} \vec{OA} \\
 &\quad + \frac{3 \cos \beta - 2 \sin \gamma \sin \alpha}{6 \sin \gamma \sin \alpha} \vec{OB} + \frac{3 \cos \gamma - 2 \sin \alpha \sin \beta}{6 \sin \alpha \sin \beta} \vec{OC} \\
 &= \frac{3 \cos \{\pi - (\beta + \gamma)\} - 2 \sin \beta \sin \gamma}{6 \sin \beta \sin \gamma} \vec{OA} \\
 &\quad + \frac{3 \cos \{\pi - (\gamma + \alpha)\} - 2 \sin \gamma \sin \alpha}{6 \sin \gamma \sin \alpha} \vec{OB} \\
 &\quad + \frac{3 \cos \{\pi - (\alpha + \beta)\} - 2 \sin \alpha \sin \beta}{6 \sin \alpha \sin \beta} \vec{OC} \\
 &= \frac{-3 \cos(\beta + \gamma) - 2 \sin \beta \sin \gamma}{6 \sin \beta \sin \gamma} \vec{OA} \\
 &\quad + \frac{-3 \cos(\gamma + \alpha) - 2 \sin \gamma \sin \alpha}{6 \sin \gamma \sin \alpha} \vec{OB} \\
 &\quad + \frac{-3 \cos(\alpha + \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta}{6 \sin \alpha \sin \beta} \vec{OC} \\
 &= -\frac{3(\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma) + 2 \sin \beta \sin \gamma}{6 \sin \beta \sin \gamma} \vec{OA} \\
 &\quad - \frac{3(\cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha) + 2 \sin \gamma \sin \alpha}{6 \sin \gamma \sin \alpha} \vec{OB} \\
 &\quad - \frac{3(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + 2 \sin \alpha \sin \beta}{6 \sin \alpha \sin \beta} \vec{OC} \\
 &= -\frac{3 \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma}{6 \sin \beta \sin \gamma} \vec{OA} \\
 &\quad - \frac{3 \cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha}{6 \sin \gamma \sin \alpha} \vec{OB} - \frac{3 \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{6 \sin \alpha \sin \beta} \vec{OC}
 \end{aligned}$$

となって、これはさっき求めたベクトル $\vec{GH}$ の $-\frac{1}{2}$ 倍である事が分かります。

従って、以上の計算により、三角形の垂心・外心・重心は一直線上にある事が分かります。

ベクトルを使った三角関数による証明は以上のとおりであり、ゴリ押し感が半端ないです。もっと軽快に幾何学的に証明することも可能ですが、そのためにはいろいろ幾何学的な知識が必要になります。

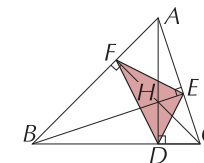
例えば、上の結果、つまり、 G が QH を 1:2 に内分していることを知っていれば、 $3\vec{QG} - \vec{QH} = \vec{0}$ であることを示せば良く、例えば $\vec{HC}$ が $\vec{AB}$ と垂直であることから

$$\begin{aligned}
 (3\vec{QG} - \vec{QH}) \cdot \vec{AB} &= (\vec{QA} + \vec{QB} + \vec{QC} - \vec{QH}) \cdot \vec{AB} \\
 &= (\vec{QA} + \vec{QB} + \vec{HC}) \cdot \vec{AB} \\
 &= (\vec{QA} + \vec{QB}) \cdot \vec{AB} + \vec{HC} \cdot \vec{AB} \\
 &= (\vec{QA} + \vec{QB}) \cdot \vec{AB} \\
 &= (\vec{QA} + \vec{QB}) \cdot (\vec{QB} - \vec{QA})
 \end{aligned}$$

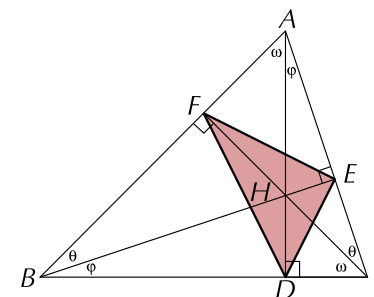
$$\begin{aligned}
 &= |\vec{QB}|^2 - |\vec{QA}|^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

が分かりますが、全く同様にして $(3\vec{QG} - \vec{QH}) \cdot \vec{BC} = 0$ も分かるので、 $3\vec{QG} - \vec{QH} = \vec{0}$ 、つまり Q, G, H は同一直線上にあることが分かります。□

発展演習 13 $\triangle ABC$ の各頂点から対辺に下ろした垂線の足を D, E, F とし、3垂線の交点、即ち垂心を H とします。このとき H は $\triangle DEF$ の内心であることを証明して下さい。



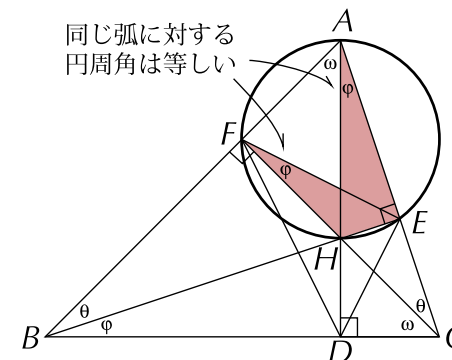
元の三角形 ABC の各頂点のところにある角に名前をつけておきます。よく見ると相似な三角形がありますので、こんな感じになっています：



まず注目するのは四角形 $AFHE$ です。 $\angle AFH = \angle HEA = \frac{\pi}{2}$ であるので、

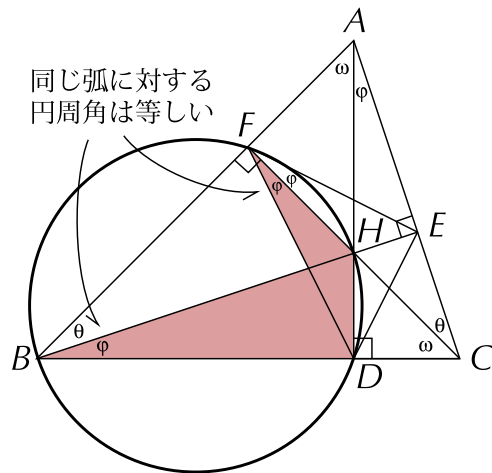
$$\angle EAF + \angle FHE = \pi$$

ともなっており、この四角形は各対角の和が π ですから円に内接する事がわかります：



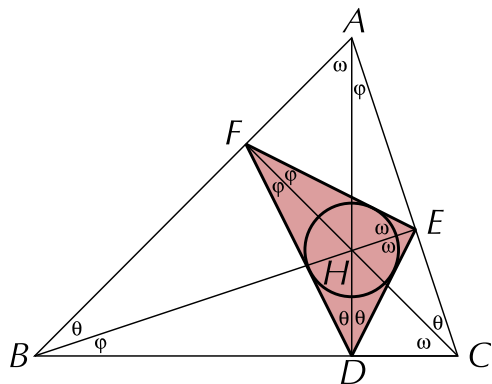
そして更に、 $\angle EFH$ と $\angle EAH$ は、同じ弧 $\widehat{GF}$ に対する円周角ですのでこれらは等しい ($= \varphi$) 事がわかります。

全く同様の事を四角形 $BDHF$ についても考えましょう：



すると図の様にやはり $\angle DFH = \angle DBH = \varphi$ である事がわかりますが、これは線分 FC が角 EFD の2等分線になって居る事を示しています。

これは角 EFD に限った話ではなく、他の2つの頂点角についても全く同様に角 DEF 、角 FDE も2等分されている事が分かります：



つまり、三角形 ABC の垂心 H は、三角形 DEF の各頂点角の2等分線の交点になっており、三角形 DEF の内心に一致します。□

発展演習 14 三角形の各辺の中点を通る円の中心は元の三角形の外心と垂心の中点であることを示してください。

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$ のとき次に注意します：

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

これらを使えば、外心 Q と垂心 H の位置ベクトルは

$$\vec{OQ} = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \beta \sin \gamma} \vec{OA} + \frac{\cos \beta}{2 \sin \gamma \sin \alpha} \vec{OB} + \frac{\cos \gamma}{2 \sin \alpha \sin \beta} \vec{OC}$$

$$\vec{OH} = \frac{\cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} \vec{OA} + \frac{\cos \gamma \cos \alpha}{\sin \gamma \sin \alpha} \vec{OB} + \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \vec{OC}$$

とも書けるので、これらの中点 M は

$$\begin{aligned} \vec{OQ} + \vec{OH} &= \frac{\cos \alpha + 2 \cos \beta \cos \gamma}{2 \sin \beta \sin \gamma} \vec{OA} \\ &\quad + \frac{\cos \beta + 2 \cos \gamma \cos \alpha}{2 \sin \gamma \sin \alpha} \vec{OB} + \frac{\cos \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta}{2 \sin \alpha \sin \beta} \vec{OC} \\ &= \frac{(\sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma) \vec{OA}}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \\ &\quad + \frac{(\sin \beta \cos \beta + 2 \sin \beta \cos \gamma \cos \alpha) \vec{OB} + (\sin \gamma \cos \gamma + 2 \sin \gamma \cos \alpha \cos \beta) \vec{OC}}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \\ &= \frac{(\sin \beta \cos \beta + \sin \gamma \cos \gamma) \vec{OA}}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \\ &\quad + \frac{(\sin \gamma \cos \gamma + \sin \alpha \cos \alpha) \vec{OB} + (\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta) \vec{OC}}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \\ &= \frac{(\sin 2\beta + \sin 2\gamma) \vec{OA} + (\sin 2\gamma + \sin 2\alpha) \vec{OB} + (\sin 2\alpha + \sin 2\beta) \vec{OC}}{4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \\ &= \frac{(\sin 2\beta + \sin 2\gamma) \vec{OA} + (\sin 2\gamma + \sin 2\alpha) \vec{OB} + (\sin 2\alpha + \sin 2\beta) \vec{OC}}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma} \\ \vec{OM} &= \frac{(\sin 2\beta + \sin 2\gamma) \vec{OA} + (\sin 2\gamma + \sin 2\alpha) \vec{OB} + (\sin 2\alpha + \sin 2\beta) \vec{OC}}{2 (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)} \end{aligned}$$

です。

三角形 $\triangle ABC$ において辺 BC, CA, AB の各中点を M_A, M_B, M_C とすると、

$$\vec{OM}_A = \frac{1}{2} (\vec{OB} + \vec{OC}), \quad \vec{OM}_B = \frac{1}{2} (\vec{OC} + \vec{OA}), \quad \vec{OM}_C = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB})$$

であって、

$$\angle M_C M_A M_B = \angle CAB = \alpha, \quad \angle M_A M_B M_C = \angle ABC = \beta, \quad \angle M_B M_C M_A = \angle BCA = \gamma$$

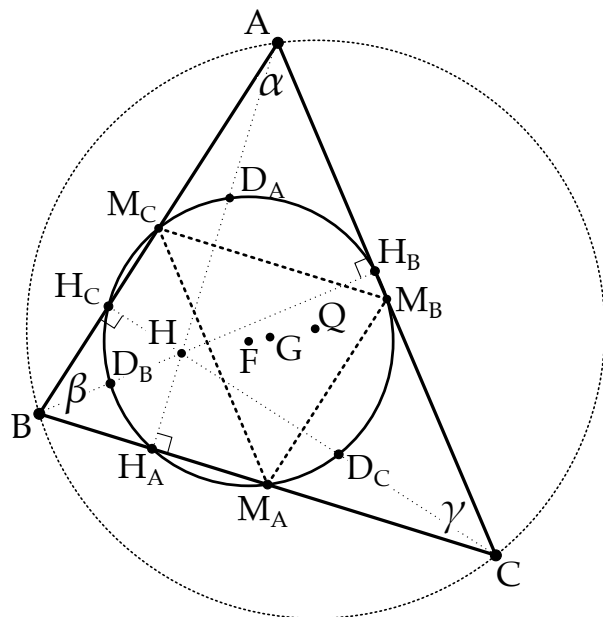
ですから、三角形 $\triangle M_A M_B M_C$ の外接円の中心（外心） F の位置ベクトルは

$$\vec{OF} = \frac{\sin 2\alpha \vec{OM}_A + \sin 2\beta \vec{OM}_B + \sin 2\gamma \vec{OM}_C}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}$$

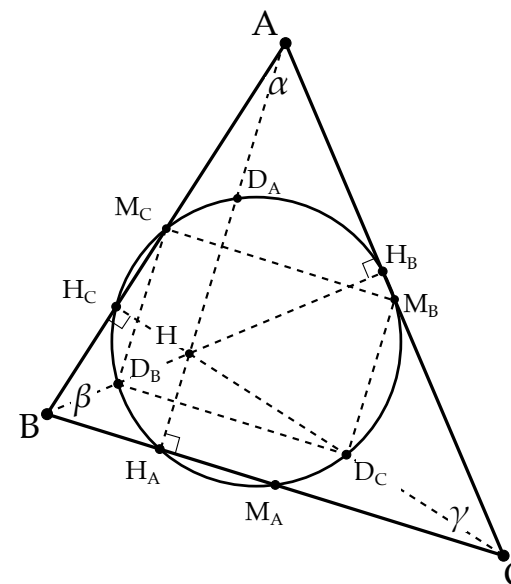
$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin 2\alpha \frac{1}{2} (\vec{OB} + \vec{OC}) + \sin 2\beta \frac{1}{2} (\vec{OC} + \vec{OA}) + \sin 2\gamma \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB})}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma} \\
&= \frac{(\sin 2\beta + \sin 2\gamma) \vec{OA} + (\sin 2\gamma + \sin 2\alpha) \vec{OB} + (\sin 2\alpha + \sin 2\beta) \vec{OC}}{2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)}
\end{aligned}$$

となり、これは直前に見た外心と垂心の midpoint に他なりません。

実は任意の三角形において、各辺の中点を通る円周を考えると、この円周上には各頂点から対辺に下ろした垂線の足も全て乗っていることが分かります。更には垂心と各頂点の中点も乗っており、合計 9 点が同一円周上にあります。



発展演習 15 三角形 $\triangle ABC$ の各辺の中点の作る三角形の外接円は、各頂点から対辺に下ろした垂線の足、垂心と各頂点の中点の合計 6 点を通ることを示してください。



頂点 A, B, C の対辺の中点を M_A, M_B, M_C とし、 HA, HB, HC の中点を D_A, D_B, D_C とします。

中点連結定理によれば $M_B M_C$ と $D_B D_C$ は BC に平行であり、 $M_C D_B$ と $M_B D_C$ も AH_A に平行です。また BC と AH_A は垂直でしたから四角形 $M_C D_B D_C M_B$ は長方形です。

従って 4 点 M_B, M_C, D_B, D_C は同一円周上にあります。このとき $M_B D_B, M_C D_C$ はこの円の直径です。

また、 $\angle D_C H_C M_C$ は $\frac{\pi}{2}$ なので H_C も $M_C D_C$ を直径とする同じ円の上にあり、 $\angle D_B H_B M_B$ も同様に $\frac{\pi}{2}$ なので H_B も $M_B D_B$ を直径とする同じ円の上にあります。

以上から 6 点 $M_B, D_B, H_B, M_C, D_C, H_C$ は同一円周上にあります。

全く同様に、6 点 $M_A, D_A, H_A, M_B, D_B, H_B$ は同一円周上にありますが、3 点が共通なのでこれは先の 6 点に乗った円周と同じものです。

全く同様に 6 点 $M_C D_C, H_C, M_A, D_A, H_A$ もこの同じ円周上にあり、以上から合計 9 点 $M_A, M_B, M_C, D_A, D_B, D_C, H_A, H_B, H_C$ は同一円周上にあります。の円の中心 F を nine point center (9 点円の中心) と呼んでいます。これが ETC のリストの 5 番目に載っている中心です。□