

Classical triangle centers

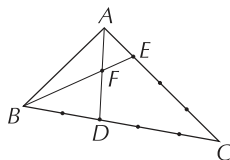
1 内分点の位置ベクトル

1.1 基本的な例題

例題 1.1 $\triangle ABC$ において次の問いに答えて下さい：

(1) 辺 BC を 2:3 に内分する点を D とした時、 $\vec{AD}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。

(2) 辺 CA を 3:1 に内分する点を E とし、線分 BE と線分 AD の交点を F とします。このとき点 F の位置ベクトル $\vec{OF}$ を 3 頂点の位置ベクトル $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ で表して下さい。



$$(1) \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{2}{5}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC}$$

(2) $\vec{AF}$ は $\vec{AD}$ の定数倍ですから、仮に $\vec{AF} = m\vec{AD}$ とおけば、(1) の結果から

$$\vec{AF} = \frac{3m}{5}\vec{AB} + \frac{2m}{5}\vec{AC} \quad (1.1)$$

である事が分かります。また、ベクトル $\vec{BF}$ はベクトル $\vec{BE}$ のやはり定数倍です。で、 $\vec{BF} = n\vec{BE}$ においてこれを変形すれば ($\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AC}$ に注意して)

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AB} + n(\vec{BA} + \vec{AE}) = (1-n)\vec{AB} + \frac{n}{4}\vec{AC} \quad (1.2)$$

です。従って、(1.1) と (1.2) 式によれば

$$\begin{aligned} \frac{3m}{5}\vec{AB} + \frac{2m}{5}\vec{AC} &= (1-n)\vec{AB} + \frac{n}{4}\vec{AC} \\ \left(\frac{3m}{5} + n - 1\right)\vec{AB} &= \left(-\frac{2m}{5} + \frac{n}{4}\right)\vec{AC} \end{aligned}$$

となるのですが、 $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ は平行ではなく、両辺の係数は 0 である事、即ち

$$\begin{cases} \frac{3}{5}m + n = 1 \\ -\frac{2}{5}m + \frac{1}{4}n = 0 \end{cases}$$

が得られます。第 2 式の 4 倍を第 1 式から引けば $\frac{11}{5}m = 1$ すなわち、 $m = \frac{5}{11}$ となつてこれを (1.1) に戻してやれば

$$\begin{aligned} \vec{AF} &= \frac{3}{11}\vec{AB} + \frac{2}{11}\vec{AC} \\ \vec{AO} + \vec{OF} &= \frac{3}{11}(\vec{AO} + \vec{OB}) + \frac{2}{11}(\vec{AO} + \vec{OC}) \\ \vec{OF} &= \frac{6}{11}\vec{OA} + \frac{3}{11}\vec{OB} + \frac{2}{11}\vec{OC} \end{aligned}$$

である事が分かります。

【別解】 P, Q が同一直線上にないとき、直線 PQ の (R を始点とした) パラメータ表示は

$$\vec{RX} = \vec{RP} + t\vec{PQ} = (1-t)\vec{RP} + t\vec{RQ}$$

です (t はパラメータ)。 $1-t=s$ と書けば次が成り立ちます：

事実 1.2 P, Q が同一直線上にないとき、点 X が直線 PQ 上にある条件：

$$\vec{RX} = s\vec{RP} + t\vec{RQ} \quad (s+t=1) \quad \text{と表せる}$$

点 X が線分 PQ 上にある条件：

$$\vec{RX} = s\vec{RP} + t\vec{RQ} \quad (s+t=1, s, t \geq 0) \quad \text{と表せる}$$

$\vec{CF}$ は $\vec{CA}$ と $\vec{CB}$ の一次結合で表されるので、

$$\vec{CF} = s\vec{CA} + t\vec{CB}$$

と置きます。

$$\vec{CF} = s\vec{CA} + t\vec{CB} = \frac{4s}{3}\vec{CE} + t\vec{CB}$$

であり、点 F は直線 BE 上にあるので

$$\frac{4s}{3} + t = 1 \cdots (*)$$

です。また

$$\vec{CF} = s\vec{CA} + t\vec{CB} = s\vec{CA} + \frac{5t}{3}\vec{CD}$$

であって、点 F は直線 AD 上にあるので

$$s + \frac{5t}{3} = 1 \cdots (**)$$

でもあります。(*), (**) を解けば、 $s = \frac{6}{11}, t = \frac{3}{11}$ ですから

$$\begin{aligned}\vec{CF} &= \frac{6}{11}\vec{CA} + \frac{3}{11}\vec{CB} \\ \vec{CO} + \vec{OF} &= \frac{6}{11}(\vec{CO} + \vec{OA}) + \frac{3}{11}(\vec{CO} + \vec{OB}) \\ \vec{OF} &= \frac{6}{11}\vec{OA} + \frac{3}{11}\vec{OB} + \frac{2}{11}\vec{OC}\end{aligned}$$

です。

□

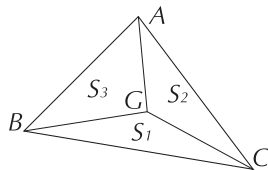
1.2 面積比と位置ベクトル

例題 1.3 三角形 ABC の内部に点 G があって、内部が3つの三角形に分割されています。これらの三角形の面積がそれぞれ、

$$(\triangle CGB \text{ の面積}) = S_1,$$

$$(\triangle AGC \text{ の面積}) = S_2,$$

$$(\triangle BGA \text{ の面積}) = S_3$$



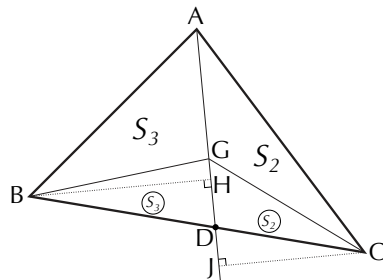
である時に点 G の位置ベクトルは次のようになる事を証明して下さい：

$$\vec{OG} = \frac{S_1\vec{OA} + S_2\vec{OB} + S_3\vec{OC}}{S_1 + S_2 + S_3}.$$

【証明】 直線 AG と辺 BC との交点を D とし、また、直線 AG へ B, C から下ろした垂線の足をそれぞれ H, J とします。

すると2つの三角形 $\triangle ABG, \triangle AGC$ の面積比を共通の底辺 AG による高さの比と見れば、 $BH : CJ = S_3 : S_2$ であり、これを今度は2つの相似な三角形 $\triangle BDH, \triangle CDJ$ の斜辺の比と見れば $BD : DC = S_3 : S_2$ が分かります。

同様に直線 BG を延ばして辺 CA との交点を E とすると、 $CE : EA = S_1 : S_3$ となっています。



ここで

$$\vec{CG} = s\vec{CA} + t\vec{CB}$$

と置くと、

$$\vec{CG} = s\vec{CA} + t\vec{CB} = s\vec{CA} + \frac{s_2 + s_3}{s_2}t\vec{CD}$$

であって、点 G は直線 AD 上にありますから

$$s + \frac{s_2 + s_3}{s_2}t = 1 \cdots (*)$$

であり、また、

$$\vec{CG} = s\vec{CA} + t\vec{CB} = \frac{s_3 + s_1}{s_1}s\vec{CE} + t\vec{CB}$$

であって、点 G は直線 BE 上にありますから

$$\frac{s_3 + s_1}{s_1}s + t = 1 \cdots (**)$$

でもあり、これらを解けば、

$$s = \frac{s_1}{s_1 + s_2 + s_3}, \quad t = \frac{s_2}{s_1 + s_2 + s_3}$$

なので、

$$\begin{aligned}\vec{CG} &= \frac{s_1}{s_1 + s_2 + s_3}\vec{CA} + \frac{s_2}{s_1 + s_2 + s_3}\vec{CB} \\ \vec{CO} + \vec{OG} &= \frac{s_1}{s_1 + s_2 + s_3}(\vec{CO} + \vec{OA}) + \frac{s_2}{s_1 + s_2 + s_3}(\vec{CO} + \vec{OB}) \\ \vec{OG} &= \frac{S_1\vec{OA} + S_2\vec{OB} + S_3\vec{OC}}{S_1 + S_2 + S_3}\end{aligned}$$

となって題意は証明されます。

□

$$\vec{OG} = \frac{S_1\vec{OA} + S_2\vec{OB} + S_3\vec{OC}}{S_1 + S_2 + S_3} \quad \text{なので、最後の結論の式から}$$

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \vec{OG} - \frac{S_1\vec{OA} + S_2\vec{OB} + S_3\vec{OC}}{S_1 + S_2 + S_3} \\ &= \frac{S_1(\vec{OG} - \vec{OA}) + S_2(\vec{OG} - \vec{OB}) + S_3(\vec{OG} - \vec{OC})}{S_1 + S_2 + S_3} \\ \vec{0} &= S_1\vec{AG} + S_2\vec{BG} + S_3\vec{CG}\end{aligned}$$

が成り立っていることも分かります。

2 Classical triangle centers

『三角形の中心』と言うと『三角形に中心なんてあったっけ??』と思うかも知れませんが、重心、内心など『中心』を匂わせるものを幾つか知っている筈です。

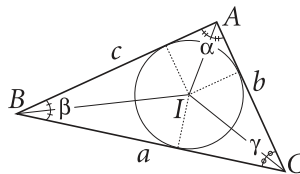
歴史的に言えば、三角形の中心と云うものは三角形にまつわる『ある3直線の交点』や『ある円の中心』などの事を言いますが、現代ではある種の対称性に関係した難しい定義があって、50000種以上の点が『Encyclopedia of triangle centers (ETC)』に登録されています (<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/etc.html>)。

ここでは前節の分割面積比を基にした位置ベクトルの計算式を使って ETC のリストの最上位にある所謂『classical triangle centers』4点の位置ベクトルを求めてみます。

2.1 Incenter (内心)

三角形の内接円の中心は、丁度各頂点角の2等分線3本の交点になっています。この点Iを内心 (Incenter) と言います。

内心から各辺に垂線を下ろせばそれは内接円の半径ですから全て長さが等しい事が分かります。従って3分割された3つの三角形の面積比は(高さが等しいので)底辺、つまり三角形の3辺の長さの比になります。



従って3辺の長さ a, b, c が分かっている様な場合には位置ベクトルは

$$\vec{OI} = \frac{a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC}}{a + b + c}$$

と書く事が出来ます。

辺の長さが分からなくても頂点角 α, β, γ が分かっているれば、正弦定理から

$$BC : CA : AB = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

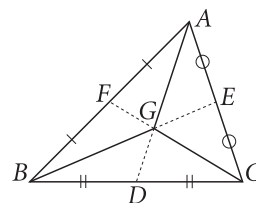
ですので、3つの三角形の面積比は

$$(\triangle IBC \text{ の面積}) : (\triangle ICA \text{ の面積}) : (\triangle IAB \text{ の面積}) = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

であることが分かり、内心Iの位置ベクトルは次の形で書く事が出来ます：

$$\vec{OI} = \frac{\sin \alpha \vec{OA} + \sin \beta \vec{OB} + \sin \gamma \vec{OC}}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}.$$

2.2 Centroid (重心)



三角形 ABC の頂点 A, B と対辺の中点 D, E を線分で結び、その2本の線分の交点を G とします (左図参照)。このときまず $\triangle ABD$ と $\triangle ADC$ に注目すれば、これらは底辺が同じ長さであってかつ高さも同じなので面積が等しい事が分かります。同様に $\triangle GBD$ と $\triangle GDC$ も同じ面積ですから、差をとれば $\triangle ABG$ と $\triangle AGC$ は同じ面積であることが分かります。

全く同様にして $\triangle ABG$ と $\triangle GBC$ も同じ面積であることが分かりますから、結局のところ3つの三角形 $\triangle ABG, \triangle AGC, \triangle GBC$ は全て同じ面積であることが分かります。

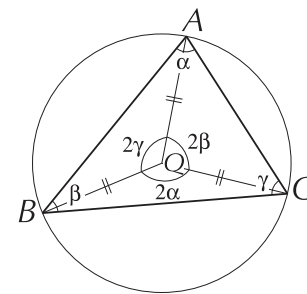
これは逆に点 F が辺 AB の中点であることを意味しますから、三角形 ABC の各頂点から対辺の中点へと伸ばした3本の直線は1点で交わることが分かりました。この交点 G の事を三角形 ABC の重心 (Centroid) と言い、その位置ベクトルは今見た面積比から明らかに次の通りになっています：

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}.$$

2.3 Circumcenter (外心)

三角形の外接円の中心 Q は外心 (Circumcenter) と呼ばれており、これは明らかに各辺の垂直2等分線3本が1点で交わった交点にもなっています。外心は三角形の外部に出てしまう事もありますが、ここでは内部にある場合を考える事にしましょう。

各頂点と外心を結んで3分割したとき、それらは全て2等辺三角形であって斜辺の長さは全て等しく、頂点角 (あるいは底辺) だけが異なります。



図の様にそれぞれの頂点角は底辺の対頂点角の倍角になっており、外接円の半径を R とすれば、例えば $\triangle QBC$ の面積は $\frac{1}{2}R^2 \sin 2\alpha$ などとなりますので、面積比は頂点角の倍角の sine の比になります：

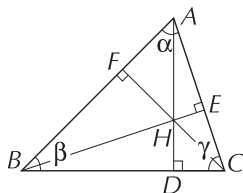
$$(\triangle QBC \text{ の面積}) : (\triangle QCA \text{ の面積}) : (\triangle QAB \text{ の面積}) = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma$$

従って、外心 Q の位置ベクトルは次のようになる筈です：

$$\vec{OQ} = \frac{\sin 2\alpha \vec{OA} + \sin 2\beta \vec{OB} + \sin 2\gamma \vec{OC}}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}.$$

2.4 Orthocenter (垂心)

三角形の3頂点 A, B, C の角度をそれぞれ α, β, γ と
して、2頂点 A, B から対辺に向かって下ろした垂線
の足をそれぞれ D, E とします。ここではこの2本の
垂線が特に三角形の内部で交わる場合を考え、その交
点を H とします。



線分 AD の長さを AD と書く事にすると、 $\frac{AD}{BD} = \tan \beta$, $\frac{AD}{CD} = \tan \gamma$ なので

$$\frac{BD}{CD} = \frac{\tan \gamma}{\tan \beta} \quad \text{すなわち} \quad BD : CD = \tan \gamma : \tan \beta$$

となっている事が分かります。すると底辺 BC の等しい三角形 $\triangle HAB, \triangle HCA$ の面
積比は高さの比 $\tan \gamma : \tan \beta$ となっている事が分かります。全く同様にして

$$(\triangle HBC \text{ の面積}) : (\triangle HAB \text{ の面積}) = \tan \alpha : \tan \gamma$$

も分かりますから、これらを合わせれば

$$(\triangle HBC \text{ の面積}) : (\triangle HCA \text{ の面積}) : (\triangle HAB \text{ の面積}) = \tan \alpha : \tan \beta : \tan \gamma$$

であることが分かります。

しかしこれは特に $(\triangle HBC \text{ の面積}) : (\triangle HCA \text{ の面積}) = \tan \alpha : \tan \beta$ を意味しま
すから、直線 CH と辺 AB はその交点 F で直交することも分かります。

以上から各頂点から対辺へ下ろした3垂線が1点で交わる事が分かりますが、この交
点 H は垂心 (Orthocenter) と呼ばれます。今見た面積比から垂心 H の位置ベクター
は次の通りです：

$$\vec{OH} = \frac{\tan \alpha \vec{OA} + \tan \beta \vec{OB} + \tan \gamma \vec{OC}}{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma}.$$

ここでは内部にある場合のみを考えましたが、前節の面積比による位置ベクターの
式を点 G が三角形の外部にある場合にも証明してしまえば同様に計算されます。

Exercise

基本演習 1 $\triangle ABC$ において次の問いに答えて下さい：

- (1) 辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とした時、 $\vec{AD}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。
- (2) 辺 CA を $2:3$ に内分する点を E とし、線分 BE と線分 AD の交点を F とします。このとき $\vec{OF}$ を $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ で表して下さい。

基本演習 2 $\triangle ABC$ の辺 AB の中点を M 、 MC の中点を D とし、辺 BC を $2:1$ に内分する点を E とすれば、3 点 A, D, E は 1 直線上にあることを証明して下さい。

基本演習 3 平行四辺形 $ABCD$ において、対角線 BD を $3:2$ に内分する点を E 、辺 CD を $1:2$ に内分する点を F とするとき、3 点 A, E, F は同一直線上にあることを示して下さい。

基本演習 4 3 角形 ABC に於いて、辺 BC 上に点 D があって、3 角形 ABD の面積が R 、3 角形 ADC の面積が S であるとし、

- (1) $BD:DC$ を求めて下さい。
- (2) $\vec{AD}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。

基本演習 5 3 角形 ABC に於いて、頂点 A の角 ($\angle CAB$) の 2 等分線が辺 BC と交わる点を D とし、各辺の長さが $AB = l, AC = m$ であったとします。

- (1) $BD:DC$ を求めて下さい。
- (2) $\vec{AD}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。

基本演習 6 三角形 ABC の頂点 A から対辺に向かって引いた垂線の足を D とし、 $\angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma$ であるとし、

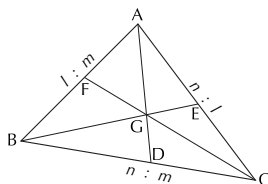
- (1) $BD:DC$ を求めて下さい。
- (2) $\vec{AD}$ を $\vec{AB}, \vec{AC}$ で表して下さい。

基本演習 7 (1) 図の三角形において

$$BD:DC = n:m, \quad CE:EA = l:n$$

が成り立っているとき、 $AF:FB = m:l$ が成り立っていることを示して下さい。

- (2) $\vec{OG}$ を $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ で表して下さい。



発展演習 8 $\triangle ABC$ の内部に点 P があって $2\vec{AP} + 3\vec{BP} + 4\vec{CP} = \vec{0}$ が成り立っているとし、線分 AP の延長線と辺 BC の交点を Q とします。

- (1) $\vec{AP}$ を $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ を用いて表して下さい。
- (2) $BQ:QC, AP:PQ$ を求めて下さい。
- (3) 面積比 $\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB$ を求めて下さい。

発展演習 9 今日やった例題 1.3 は、点 G が三角形の辺の上や外部にある場合にも成り立つでしょうか？ 考えてみて下さい。

基本演習 10 $s > 1, 0 < t < 1, 0 < u < 1$ とします。

三角形 ABC の辺 AB を $s:(s-1)$ に外分する点を S 、辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を T 、辺 CA を $u:(1-u)$ に内分する点を U とします。

このとき 3 点 S, T, U が同一直線上にあるために必要十分条件は

$$\frac{(s-1)(t-1)(u-1)}{stu} = 1$$

であること (Μενέλαος (メネラウス) の定理) を証明して下さい。

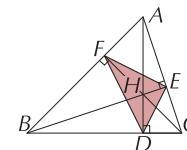
基本演習 11 三角形の 3 頂点角が α, β, γ のとき次が成り立つことを示して下さい：

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

発展演習 12 三角形の垂心・外心・重心は一直線上にある事を証明して下さい。この直線を Euler 線と言います (L.Euler, 1767)。

発展演習 13 $\triangle ABC$ の各頂点から対辺に下ろした垂線の足を D, E, F とし、3 垂線の交点、即ち垂心を H とします。このとき H は $\triangle DEF$ の内心であることを証明して下さい。



発展演習 14 三角形の各辺の中点を通る円の中心は元の三角形の外心と垂心の中点であることを示して下さい。

発展演習 15 三角形の各辺の中点を通る円は、各頂点から対辺に下ろした垂線の足、垂心と各頂点の中点の合計 6 点も通ることを示して下さい。