

行列の計算

1 型と転置 ～主に記号の準備～

1.1 型

実数を長方形に並べたものを行列と言った訳ですが、その縦の長さ（縦に幾つ数字が並んでいるか）が m 、横の長さが n であるとき、この行列は (m, n) -型、或は、 $m \times n$ 型であると云います。

$$\text{縦に } m \text{ 個} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} : (m, n)\text{-型} \right.$$

横に n 個

一般に行列 M において、上から i 番目、左から j 番目の成分を M の (i, j) -成分といい、多くの場合 m_{ij} と書きます（そのためには行列を表す記号は常に大文字を使う必要があります。行列が A ならその成分は a_{ij} です）。

1.2 転置

行列 M の転置 (transpose) tM は、 $(1, 1)$ 成分、 $(2, 2)$ 成分、 $\cdots$ (非正方行列でこれらが無い場合は、想像で補って考える) を通る“対角線”で折り返せば良い：

$${}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -6 & -7 & -8 & -9 & -10 \\ 111 & 112 & 113 & 114 & 115 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 111 \\ 2 & -7 & 112 \\ 3 & -8 & 113 \\ 4 & -9 & 114 \\ 5 & -10 & 115 \end{pmatrix}$$

ここで言う対角線は行列（長方形）の対角線そのものではないので注意が必要です。

良く使う型のものでは、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$${}^t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad {}^t \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

であり、一般に、 (m, n) -型の行列を転置すると (n, m) -型になります。

また、転置を右肩に大文字の（斜体でない） T で表す (M^T) 流儀もあります。実際に編入試験でこの記法で出題されているものを何度も見たことがあります。右肩に小文字の t と書くことはないようですので、その辺りで区別すると良いでしょう。

1.3 記法

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

とした場合、 $(3, 3)$ -型の正方行列 A は3次元ベクトル（ベクトルと言ったら、常に縦ベクトルを意味する事に注意）を3つ左右に並べたものと解釈する事が出来て：

$$A = \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right) = (a \quad b \quad c)$$

と（便宜上）書く事があります。このとき A の転置は

$${}^t \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t a \\ {}^t b \\ {}^t c \end{pmatrix}$$

と云う風に3次元横ベクトルを3つ上下に並べたものと解釈する事も出来て、

$${}^t A = {}^t (a \quad b \quad c) = \begin{pmatrix} {}^t a \\ {}^t b \\ {}^t c \end{pmatrix}$$

とも書けます。

2 積

行列の掛け算の基本は次の式、これに尽きます：

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = aX + bY.$$

あとはこれを左右・上下に拡張して考えます：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX + bY \\ cX + dY \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Z \\ Y & W \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} X & Z \\ Y & W \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} \right) = (aX + bY \quad aZ + bW), \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Z \\ Y & W \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} X & Z \\ Y & W \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX + bY & aZ + bW \\ cX + dY & cZ + dW \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.1 積と転置の関係

行列の積を転置すると順番が入れ替わるので注意が必要です：

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA.$$

簡単な場合に成分計算して確かめてみて下さい（演習問題参考）。

3 Cayley-Hamilton Theorem

2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$$

が成り立ちます。3次の場合はどうでしょうか？（演習問題参照）。

4 ベクトルの内積

(3, 1)-型の行列と3次元ベクトルを同一視する事にします。そうして転置記号を使うとベクトルの内積も行列の積だと思える事になります：

$${}^t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}.$$

内積は任意の次元のベクトルに対して定義する事が出来ます。2つのベクトル a, b （もちろん同じ次元である必要がありますが）に対して ${}_a b = a \cdot b$ となります。

事実 4.1 [内積の性質]

【対称性】： $a \cdot b = b \cdot a$.

【双線形性】：定数倍、足し算は分配法則によって展開出来ます。

$$(la + mb) \cdot c = l(a \cdot c) + m(b \cdot c), \quad a \cdot (lb + mc) = l(a \cdot b) + m(a \cdot c)$$

【回転対称性】： R を回転行列とすると、 $(Ra) \cdot (Rb) = a \cdot b$.

【幾何学的な意味】：ベクトル a, b の挟む角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると、

$$a \cdot b = |a||b| \cos \theta.$$

5 3次元ベクトルのクロス積

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

内積とは違ってクロス積は3次元でのみ定義されます。日本にはクロス積のことを『外積』と呼ぶ習慣もあります。

事実 5.1 [クロス積の性質]

【反対称性】： $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ 従って、特に $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

【双線形性】：定数倍・足し算は分配法則によって展開出来ます。

$$(l\mathbf{a} + m\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = l(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + m(\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \quad \mathbf{a} \times (l\mathbf{b} + m\mathbf{c}) = l(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + m(\mathbf{a} \times \mathbf{c}).$$

【回転対称性】： R を 3次元の回転行列とすると、 $(R\mathbf{a}) \times (R\mathbf{b}) = R(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

【幾何学的な意味 向き】： $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ の双方に“直交”します：

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0.$$

【幾何学的な意味 大きさ】：ベクトル $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ の挟む角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると、

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta.$$

事実 5.2 任意の3次元ベクトル $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ に対して次が成り立ちます：

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \{(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}\}$ を計算すると $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ が分かります：

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \{(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}\} \\ &= \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{a} \times \mathbf{c}\} + \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{b} \times \mathbf{c}\} + \mathbf{b} \cdot \{\mathbf{a} \times \mathbf{c}\} + \mathbf{b} \cdot \{\mathbf{b} \times \mathbf{c}\} \\ &= \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{b} \times \mathbf{c}\} + \mathbf{b} \cdot \{\mathbf{a} \times \mathbf{c}\}. \end{aligned}$$

5.1 クロス積の大きさ

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{のとき、} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

であって、

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3 \\ &\quad + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 \\ &= a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2) \\ &\quad - 2(a_1a_2b_1b_2 + a_2a_3b_2b_3 + a_3a_1b_3b_1) \\ &= a_1^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &\quad - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2) - 2(a_1a_2b_1b_2 + a_2a_3b_2b_3 + a_3a_1b_3b_1) \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \end{aligned}$$

となっており、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ の挟む角を θ とすれば

$$\begin{aligned} &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta \\ &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

が成り立っています。

Exercise

基本演習 1 次の行列の計算を実行し気付いた事を述べて下さい：

$$\begin{aligned}
 (1) & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} & (2) & \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} & (3) & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\
 (4) & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} & (5) & \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} & (6) & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 (7) & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & (8) & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} & (9) & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^2 \\
 (10) & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & (11) & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\} & (12) & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

基本演習 2 次のベクトル・行列の計算をして下さい。ただし、書かれている計算が定義されない場合は『定義されないため計算不可能』と答えて下さい。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^2$$

基本演習 3 次のクロス積を計算してください：

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

基本演習 4 次の各行列の型を答え、更に転置した行列を求めて下さい：

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

基本演習 5 行列 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ の (2,3)-成分、(3,1)-成分は何ですか。

基本演習 6 $\mathbf{a} = {}^t(a_1 \ a_2 \ a_3)$, $\mathbf{b} = {}^t(b_1 \ b_2 \ b_3)$ と置いて、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ を計算により確かめて下さい。

基本演習 7 (1) 次が成立することを示してください。

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}.$$

(2) 一般に次が成立することを示してください。

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

基本演習 8 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ を示してください。

基本演習 9 2次正方行列 A, B について ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ である事を証明して下さい。

基本演習 10 ${}^tM = M$ を満たす行列を対称行列と言います。正方行列 A に対して、 $B = A {}^tA$, $C = A + {}^tA$ はいずれも対称行列である事を示して下さい。

基本演習 11 2次正方行列 M は ${}^tMM = E$ を満たすとき直交行列であると云います。 $M = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ が直交行列である時にベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ について何が言えますか。

基本演習 12 何乗かすると O (零行列) になる正方行列を冪零行列と言いますが、2つの冪零行列 A, B が可換、すなわち $AB = BA$ であるとき、 AB 、 $A + B$ は共に冪零行列であることを示してください。

基本演習 13 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 = O$ を満たすとき、 $ad - bc = 0$ であることを示してください。

基本演習 14 (1) 2次正方行列 A が $A^3 = O$ を満たすとき、実は既に $A^2 = O$ であることを示してください。

(2) 2次正方行列 A が $A^4 = O$ を満たすとき、実は既に $A^2 = O$ であることを示してください。

基本演習 15 $A^2 = A, B^2 = B, (A + B)^2 = A + B$ であるとき、 $AB = BA = O$ であることを示してください。

$$\text{基本演習 16} \quad e^A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

によって行列指数を定義するとき、 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ に対して e^A を求めてください。

発展演習 17 3次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\begin{aligned}
 & A^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})A^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} + a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31})A \\
 & - (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22})E = O
 \end{aligned}$$

が成り立つことを示してください。

発展演習 18 3次元ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は同一平面上には無いものとします。

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の大きさは、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を2辺とする平行四辺形の面積である事を示して下さい (特に $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が xy -平面上にあると仮定して計算してみてください)。

(2) また、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の大きさは、この2つのベクトルのはさむ角を $0 < \theta < \pi$ とすると、 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$ である事を示して下さい。

(3) $|\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|$ は、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を3辺とする平行六面体の体積である事を示して下さい (特に $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が xy -平面上にあると仮定して計算してみてください)。

発展演習 19 (1) 直線 $y = 3x$ に関する折り返しと云う一次変換の表現行列 M を求め、 ${}^tMM = E$ を満たしている (直交行列である) 事を示して下さい。

(2) M は任意の2次元ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して $(M\mathbf{a}) \cdot (M\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を満たしている事を示して下さい。またそれは幾何学的にはどう説明されますか。

Exercise 解答例

基本演習 1 次の行列の計算を実行し気付いた事を述べて下さい (いろいろ)。

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -4 + 6 = 2$$

$$(2) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (4)(-1) & (4)(2) \\ (3)(-1) & (3)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = (-4 + 6 \quad 0 + 4) = (2 \quad 4)$$

(4)、(5) これらの積は定義されません。行列の積は (m,n)-型 $\times$ (n,p)-型に対して定義され、その結果は (m,p)-型になります。

$$(6) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 23 \end{pmatrix}$$

一般に AB が定義されても BA が定義されるとは限りません。

$$(7) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 23 & 2 \end{pmatrix} \quad (8) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

このように、掛け算は左右を入れ替えて積が定義出来たとしても結果が異なる場合があります。

$$(9) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このように、『0 でない』もの同士を掛けても 0 になってしまう場合があります。

$$(11) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(- \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(12) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

x 軸の正の向きのベクトルと y 軸の正の向きのベクトルをこの順でクロス積をとると、 z 軸の正の向きのベクトルとなります (右手系)。□

基本演習 2 次のベクトル・行列の計算をして下さい。ただし、書かれている計算が定義されない場合は『定義されないため計算不可能』と答えて下さい。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^2$$

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} = (11) \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & 66 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (39) = \begin{pmatrix} 39 \\ 78 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

基本演習 3 次のクロス積を計算してください：

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 26 \\ 2 \end{pmatrix}$$

□

基本演習 4 次の各行列の型を答え、更に転置した行列を求めて下さい：

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(1) (1,3) \text{ 型、} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (2) (3,2) \text{ 型、} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) (2,2) \text{ 型、} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

□

基本演習 5 行列 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ の (2,3)-成分、(3,1)-成分は何ですか。

(2,3)-成分： f 、(3,1)-成分： g

□

基本演習 6 $a = {}^t(a_1 \ a_2 \ a_3)$, $b = {}^t(b_1 \ b_2 \ b_3)$ と置いて、 $a \times b = -(b \times a)$ を計算により確かめて下さい。

具体的な計算において a_j の a の部分と b_i の b の部分を入れ替えれば良いので簡単に確かめられるはずです。

□

基本演習 7 (1) 次が成立することを示してください。

$$a \times (a \times b) = (a \cdot b)a - (a \cdot a)b.$$

(2) 一般に次が成立することを示してください。

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c.$$

(1) a, b が平行な場合は自明です。

a, b が平行でない場合、このベクトルは $a \times b$ に垂直なので、 a, b の作る平面上にあります。そこで

$$a \times (a \times b) = pa + rb$$

と置けば、

$$0 = a \cdot \{a \times (a \times b)\} = pa \cdot a + ra \cdot b$$

$$\{a \times (a \times b)\} \cdot b = pa \cdot b + rb \cdot b$$

$$(b \times a) \cdot (a \times b) = pa \cdot b + rb \cdot b$$

$$-|a \times b| = pa \cdot b + rb \cdot b$$

ですからこの連立方程式を解いて、

$$p = a \cdot b, \quad r = -a \cdot a$$

を得ます。成分計算でももちろん出来るでしょうが、このやりの方が楽でしょうか？

(2) こちらは成分計算するしかないかなあ。

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

と置けば、

$$b \times c = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}$$

であり、

$$a \times (b \times c) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}$$

$$(a \cdot c)b - (a \cdot b)c = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c$$

$$= \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_1b_1c_1 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 \\ a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_2c_3 - a_1b_1c_2 - a_2b_2c_2 - a_3b_3c_2 \\ a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 + a_3b_3c_3 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 - a_3b_3c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}$$

ですから、確かに一致しています。

□

基本演習 8 $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = \mathbf{0}$ を示してください。

前問の結果から

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$$

$$b \times (c \times a) = (b \cdot a)c - (b \cdot c)a$$

$$c \times (a \times b) = (c \cdot b)a - (c \cdot a)b$$

なので、全て加えれば確かに $\mathbf{0}$ になります。

□

基本演習 9 2 次正方行列 A, B について ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ であることを証明して下さい。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} f & g \\ h & k \end{pmatrix}$ として実際に両辺を計算してみると、

$${}^t(AB) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & g \\ h & k \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} af+bh & ag+bk \\ cf+dh & cg+dk \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af+bh & cf+dh \\ ag+bk & cg+dk \end{pmatrix}$$

$${}^tB {}^tA = \begin{pmatrix} f & g \\ h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & h \\ g & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} fa+hb & fc+hd \\ ga+kb & gc+kd \end{pmatrix}$$

となってこれらは等しいため題意は証明されました。

□

基本演習 10 ${}^tM = M$ を満たす行列を対称行列と言います。正方行列 A に対して、 $B = A {}^tA$, $C = A + {}^tA$ はいずれも対称行列であることを示して下さい。

$${}^tB = {}^t(A {}^tA) = {}^t({}^tA) {}^tA = A {}^tA = B, \quad {}^tC = {}^t(A + {}^tA) = {}^tA + A = C$$

□

基本演習 11 2 次正方行列 M は ${}^tMM = E$ を満たすとき直交行列であると云います。 $M = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ が直交行列である時にベクトル a, b について何が言えますか。

$E = {}^tMM$ を具体的に書けば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^t \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^ta \\ {}^tb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^ta a & {}^ta b \\ {}^tb a & {}^tb b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & a \cdot b \\ b \cdot a & |b|^2 \end{pmatrix}$$

によれば、 a, b は共に単位ベクトルであり、直交します。

□

基本演習 12 何乗かすると O (零行列) になる正方行列を冪零行列と言いますが、2 つの冪零行列 A, B が可換、すなわち $AB = BA$ であるとき、 AB 、 $A + B$ は共に冪零行列であることを示してください。

$A^m = O, B^n = O$ と仮定します。可換ですから

$$(AB)^m = (AB) \cdots (AB) = A^m B^m = OB^m = O$$

であり、 AB は冪零行列です。また、可換なので

$$(A+B)^{2(m+n)} = \sum_{j=0}^{2(m+n)} \binom{2(m+n)}{j} A^j B^{2(m+n)-j}$$

ですが、 $0 \leq j \leq 2(m+n)$ のとき $j, 2(m+n)-j$ の少なくともいずれか一方は $m+n$ 以上であり、 A^j と $B^{2(m+n)-j}$ の少なくともどちらか一方は O ですから、任意の j に対して

$$A^j B^{2(m+n)-j} = O$$

となり、 $(A+B)^{2(m+n)} = O$ が得られますからこちらも冪零です。

□

基本演習 13 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 = O$ を満たすとき、 $ad - bc = 0$ であることを示してください。

Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

従って

$$(a+d)A = (ad-bc)E$$

ですが、 $a+d \neq 0$ のとき A は単位行列の定数倍であって、 $A^2 = O$ となるためには $ad-bc = 0$ でなければなりません。

また $a+d = 0$ のときも、左辺が零行列ですから右辺の係数は $ad-bc = 0$ です。

□

基本演習 14 (1) 2 次正方行列 A が $A^3 = O$ を満たすとき、実は既に $A^2 = O$ であることを示してください。

(2) 2 次正方行列 A が $A^4 = O$ を満たすとき、実は既に $A^2 = O$ であることを示してください。

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とします。 $A^3 = O$ と仮定すると、Cayley-Hamilton の定理から

$$\begin{aligned} A^3 - (a+d)A^2 + (ad-bc)A &= O \\ (a+d)A^2 &= (ad-bc)A \end{aligned}$$

が成り立っています。ここで $a+d=0$ であれば $ad-bc=0$ であるか、もしくは $A=O$ であることになりましたが、前者ならばもう一度 Cayley-Hamilton の定理から $A^2=O$ であり、後者の場合も明らかに $A^2=O$ です。

$a+d \neq 0$ である場合は

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{ad-bc}{a+d} A \\ (ad-bc)E - (a+d)A &= \frac{ad-bc}{a+d} A \\ (ad-bc)E &= \frac{(a+d)^2 + (ad-bc)}{a+d} A \end{aligned}$$

が成り立っており、 $ad-bc=0$ でなければ左辺は単位行列の (0 でない) 定数倍であって、右辺の係数も 0 ではありません。すると A はやはり単位行列の (0 でない) 定数倍ですから、 $A^3=O$ となることはありません。従って $ad-bc=0$ であることが分かりますが、

$$O = (a+d)A$$

であって $a+d \neq 0$ でしたから $A=O$ が得られてしまい、矛盾します。

(2) 同様に成分を置き、 $A^4=O$ と仮定します。Cayley-Hamilton の定理から

$$\begin{aligned} A^4 - (a+d)A^3 + (ad-bc)A^2 &= O \\ (a+d)A^3 &= (ad-bc)A^2 \end{aligned}$$

が成り立っています。ここで $a+d=0$ であれば $ad-bc=0$ であるか、もしくは $A^2=O$ であることになりましたが、前者ならばもう一度 Cayley-Hamilton の定理から $A^3=O$ であり、(1) の結果から $A^2=O$ です。□

基本演習 15 $A^2=A, B^2=B, (A+B)^2=A+B$ であるとき、 $AB=BA=O$ であることを示してください。

$$A+B = (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A + AB + BA + B$$

から、まず $AB = -BA$ です。また、

$$AB = A^2B = A(AB) = A(-BA) = (-AB)A = BA^2 = BA$$

でもありますから、 $AB=O$ です。□

基本演習 16 行列指数を

$$e^A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

によって定義するとき、 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ に対して e^A を求めてください。

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ですから、

$$e^A = E + A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が分かります。□

発展演習 17 3 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\begin{aligned} A^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})A^2 \\ + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} + a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31})A \\ - (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22})E = O \end{aligned}$$

が成り立つことを示してください。

頑張ってください (略)。□

発展演習 18 3 次元ベクトル a, b, c は同一平面上には無いものとします。

(1) $a \times b$ の大きさは、 a, b を 2 辺とする平行四辺形の面積である事を示して下さい (特に a, b が xy -平面上にあると仮定して計算して下さい)。

(2) また、 $a \times b$ の大きさは、この 2 つのベクトルのはさむ角を $0 < \theta < \pi$ とすると、 $|a \times b| = |a||b|\sin\theta$ である事を示して下さい。

(3) $|c \cdot (a \times b)|$ は、 a, b, c を 3 辺とする平行六面体の体積である事を示して下さい (特に a, b が xy -平面上にあると仮定して計算して下さい)。

(1) a, b が xy -平面上にあると仮定して、その成分が $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとし

ます。このときクロス積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

となりますから、その大きさは $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ となります。

一方、件の平行四辺形の面積 S は、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の位置関係が下図のようになっている場合には

$$\begin{aligned} S &= (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - a_1 a_2 - 2a_2 b_1 - b_1 b_2 \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}$$

であり、また $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の位置関係が逆ならば $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ の役割が入れ替わるだけなので

$$S = a_2 b_1 - a_1 b_2 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

となる事が分かります。これらはいずれも面積を計算したものですからどちらも正になっていなければならない、結局どちらの場合にも先ほど計算したクロス積の大きさに一致している事が分かります。

(2) 同様に成分で計算すれば

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\ &= a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_1^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_2^2 \\ &= a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \\ &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \end{aligned}$$

となっているので、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$ である事を思い出せば、

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \\ |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta \\ &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

である事が分かります。ここで $0 < \theta < \pi$ のとき $\sin \theta > 0$ であったことから、結局、

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$$

となって題意は証明されます。

(3) まず最初に平行六面体の体積は底面の面積に高さを掛けたものであった事を注意しておきます。また、 $\mathbf{c}$ と $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ のなす角度を ϕ とすると、

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cos \phi = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cos \phi$$

であって、 $|\mathbf{c}| \cos \phi$ の部分は $\mathbf{c}$ と $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ のなす角度が $\frac{\pi}{2}$ 以下であればそのままこの平行六面体の高さに相当しますし、あるいは $\mathbf{c}$ と $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ のなす角度が $\frac{\pi}{2}$ 以上であれば高さにマイナスを付けたものになっていますので、 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ が底面の面積だった事と合わせれば全体としては平行六面体の体積か、あるいは体積にマイナスの符号をつけたものになっています。□

発展演習 19 (1) 直線 $y = 3x$ に関する折り返しと云う一次変換の表現行列 M を求め、 ${}^t M M = E$ を満たしている (直交行列である) 事を示して下さい。

(2) M は任意の2次元ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して $(M\mathbf{a}) \cdot (M\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を満たしている事を示して下さい。またそれは幾何学的にはどう説明されますか。

(1) この一次変換は直線 $y = 3x$ 上の点を動かさないの、例えば点 $(1, 3)$ の移り先は $(1, 3)$ です。

また、原点でこの直線と直交する直線は $y = -\frac{1}{3}x$ ですが、折り返しの様子を見れば、この直線上の点はちょうど原点を中心として反対側の点 (矢張り同じ直線 $y = -\frac{1}{3}x$ 上にある) に移る事が分かります。従って例えば点 $(-3, 1)$ は原点に関して対称な点 $(3, -1)$ に移ります。

以上から、位置ベクトルの計算を行列の積で表せば

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

である事になって、これから

$$\begin{aligned} \left(M \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ M \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり、左辺第二因子の逆行列を両辺に右から掛ければ

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と計算されて求める行列が分かりました。

またこの行列の転置行列は、

$${}^t M = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ですから、

$${}^tMM = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = E$$

となって題意は示されました。

(2) 実際に計算してみれば、(1) の結果から

$$(Ma) \cdot (Mb) = {}^t_a {}^tMMb = {}^t_a Eb = {}^t_ab = a \cdot b$$

です。

ベクトルの内積はベクトルの長さと挟む角度に因って決まりますが、これをある直線でそっくり折り返すと、ベクトルそのものは違ったものになってもそれらの長さや挟む角度は変わりません。従って折り返しと云う一次変換でベクトルの内積は不変であることがわかります。□