

空間ベクトル 問題演習

4.1 例題

基本演習 1 [首都大 2018] xyz 座標系において, $A(-1, 3, 2), B(2, 5, 1), C(1, 1, 0)$ の 3 点がある. 以下の問いに答えなさい.

- (1) ベクトル $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$ をそれぞれ求めなさい.
- (2) 2 点 A, B を通る直線の方程式を求めなさい.
- (3) 3 点 A, B, C を含む平面の方程式を求めなさい.

(1)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{CA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

あるいは

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

(3)

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ですから、求める平面の方程式は

$$3(x-1) - 2(y-1) + 5(z-0) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 3x - 2y + 5z - 1 = 0$$

です。

□

基本演習 2 [電気通信大 2021]

点 O を原点とする座標空間内の 4 点 $A(2, 1, 3), B(1, 1, 2), C(3, 0, 1), D(2, 1, 2)$ を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) 3 点 A, B, C を通る平面 H の方程式を求めよ.
- (2) 平面 H と点 D の距離 d を求めよ. (3) 外積 $\vec{OA} \times \vec{OB}$ を求めよ.
- (4) 三角形 OAB の面積 S を求めよ. (5) 四面体 $OABC$ の体積 V を求めよ.

$$(1) \quad \vec{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ですから、平面 H の式は

$$1(x-3) + 3(y-0) - (z-1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad x + 3y - z - 2 = 0$$

です。

$$(2) \quad d = \frac{|2 + 3 \cdot 1 - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

(3)

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4)

$$S = \frac{1}{2} \left| \vec{OA} \times \vec{OB} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(5) 平面 OAB の方程式は

$$x + y - z = 0$$

ですから、点 C から下ろした垂線の長さ、すなわち、三角形 OAB を底面と見た時の、4 面体 $OABC$ の高さは

$$\frac{|3 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

です。従って 4 面体 $OABC$ の体積は

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

です。

□

4.2 Exercise

■基礎

基本演習 3 [熊本大 2021] 3 点 $(1, 2, 3), (1, -1, 2), (2, 3, 1)$ を通る平面の方程式を求めよ.

基本演習 4 [三重大 2003] 3 点 $P_1(3, -2, -1), P_2(1, 3, 4), P_3(2, 1, -2)$ を通る平面の方程式を求めよ. また, その平面と原点 O との最短距離を求めよ.

基本演習 5 [福井大 2001] 三つのベクトル $A(2, 3, 4), B(1, 2, 1), C(3, 1, 2)$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ.

基本演習 6 [筑波大 2006] (1) 2 つのベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ のなす角を求めなさい.

(2) 2 つのベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の両方に直交する単位ベクトルを求めなさい. 解答する単位ベクトルは一つでよい.

(3) 3 点 $A(2, 1, 3), B(3, 1, 1), C(1, 4, 4)$ を通る平面の方程式を求めなさい.

基本演習 7 [北見工業大 2011] ベクトル $\vec{N} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に直交し, 点 $(-1, 2, 3)$ を通る平面の方程式を求めよ.

基本演習 8 [北見工業大 2017] ベクトル $\vec{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に直交し, 点 $(0, 1, 2)$ を通る平面の方程式を求めよ.

基本演習 9 [北見工業大 2012] 平面 $x + y + z = 0$ および平面 $x + 2y + 3z = 0$ と直交し, 原点を通る平面の方程式を求めよ.

■標準

基本演習 10 [静岡大 2013]

空間内に 4 点 $A(1, 1, 1), B(2, 3, 2), C(-2, 0, 3), D(0, 2, 5)$ をとる. 3 点 A, B, C を含む平面を π とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 平面 π の方程式を求めよ.
- (2) 点 D を通り平面 π に垂直な直線の方程式を求めよ.
- (3) 点 D と平面 π との距離を求めよ.
- (4) 三角形 ABC の面積を求めよ.
- (5) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ.

基本演習 11 [北海道大 2021]

3 次元空間にある次の 2 つの平面について, 以下の設問に答えなさい.

$$\begin{cases} \text{平面 1 : } & x + y + \sqrt{2}z = 0 \\ \text{平面 2 : } & x + y = 0 \end{cases}$$

- (1) 平面 1 の法線ベクトルと平面 2 の法線ベクトルをひとつずつ求めなさい.
- (2) (1) で求めた 2 つの法線ベクトルのなす角を求めなさい. ただし, 答えは 0 以上 π 以下とすること.
- (3) (1) で求めた 2 つの法線ベクトルの両方と直交するベクトルのうち, 大きさが 1 であるものをひとつ求めなさい.

基本演習 12 [岩手大 2017]

3 次元空間上に存在する 3 点 $A(0, 1, -1), B(2, 0, 3), C(1, 1, 0)$ について, 次の問いに答えなさい.

- (1) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めなさい.
- (2) (1) の平面の単位法線ベクトルを求めなさい.
- (3) 原点を通り, (2) の単位法線ベクトルに平行な直線の方程式を求めなさい.
- (4) (1) の平面と (3) の直線との交点の座標を求めなさい.

基本演習 13 [秋田大 2022] xyz 座標空間に 3 点 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 2)$ があるとす. このとき, 以下の問いに答えなさい.

- (1) 2 つのベクトル $\vec{CA}, \vec{CB}$ と直交するベクトルを求めなさい.
- (2) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めなさい.
- (3) (2) の平面に関して点 $D(0, 0, 1)$ と対称な点を E とする. 点 E の座標を求めなさい.

基本演習 14 [筑波大 2007] 球面 $C: x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 4z - 8 = 0$ について以下の問いに答えよ.

- (1) C が yz 平面と交わってできる円の中心と半径を求めよ.
- (2) C が y 軸から切り取る線分の長さを求めよ.
- (3) C 上の点 $A(6, 2, 2)$ における接平面の方程式を求めよ.

基本演習 15 [富山大 2004]

3 次元空間 $O-xyz$ に 3 点 $A(1, 2, 3), B(2, 2, 1), C(1, 3, 1)$ がある. ベクトル $\vec{a} = \vec{CA}, \vec{b} = \vec{CB}$ として, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のそれぞれの長さを求めよ.
- (2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき, $\cos \theta$ を求めよ.
- (3) 三角形 ABC の面積 S を求めよ.
- (4) 点 B は原点 O から平面 ABC への垂線の足であることを示せ.
- (5) 三角錐 $OABC$ の体積 V を求めよ.

基本演習 16 [静岡大 2011]

xyz 空間内に 4 点 $A(1, 0, 2), B(-1, 1, 1), C(0, 2, 6), D(4, 2, -1)$ が与えられている。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 3 点 A, B, C を通る平面 π の方程式を求めよ。
- (2) 平面 π と点 D の距離を求めよ。
- (3) 点 D から平面 π に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

基本演習 17 [豊橋技科大 2004]

空間の直交座標軸上に 3 点 $A(3, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 2)$ がある。以下の各問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\vec{AB}$ とベクトル $\vec{AC}$ を成分で表し、それぞれの大きさを求めよ。
- (2) 三角形 ABC の面積を求めよ。
- (3) 3 点を通る平面を α とするとき、原点 O から α に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

基本演習 18 [豊橋技科大 2012] 以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ がある。ただし、 c_1, c_2, c_3 は実数である。 $\vec{c}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に直交し、 $\vec{c}$ の大きさは 9 である。 $\vec{c}$ を求めよ。

(2) 直交座標空間内に、点 $D(3, -4, 2)$ を通りベクトル $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に平行な直線がある。

さらに点 $E(5, -6, 4)$ を中心とした半径 6 の球がある。直線と球との交点の座標 (x, y, z) を求めよ。

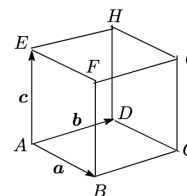
基本演習 19 [三重大 2022] $-x + 2\sqrt{2}y - 4z = 1$ で表される平面 A と、 $2x + 2z = 1$ で表される平面 B がある。この 2 つの平面に関する以下の各問いに答えなさい。

- (1) この 2 つの平面のなす角は何度になるか求めなさい。
- (2) この 2 つの平面の交線の方程式を求めなさい。
- (3) この 2 つの平面の交線を含み、かつ原点を通る平面の方程式を求めなさい。

基本演習 20 [宮崎大 2001] 3 点 $O(0, 0, 0), A(1, 2, 1), B(2, 0, -1)$ がある。2 つのベクトル $\vec{OA}, \vec{OB}$ で張られる平面上の点で点 $C(6, 1, 5)$ までの距離を最小にする点 X の座標を求めよ。

基本演習 21 [鹿児島大 2007] 右図の立方体 $ABCD - EFGH$ において、ベクトル $\vec{ED}$ と $\vec{EC}$ のなす角 θ の余弦を求めよ。ただし、ベクトル $\vec{a} = \vec{AB}, \vec{b} = \vec{AD}, \vec{c} = \vec{AE}$ は、互い

に直交しており、その長さはともに l である。



基本演習 22 [鹿児島大 2021] 点 $O(0, 0, 0)$ を原点とする 3 次元直交座標系 $O - xyz$ において、点 $A(0, 1, 0)$ 、点 $B(1, 0, 2)$ がある。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 A と点 B を通る直線 l の方程式を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ の面積 S を求めよ。
- (3) 点 O から直線 l に下ろした垂線の長さ d を求めよ。

■応用

基本演習 23 [岩手大 2022] 原点 O の xyz 空間に点 $A(2, 1, 3)$ 、点 $B(3, -2, 1)$ が与えられている。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ のなす角 θ を求めなさい。ただし、 $0 \leq \theta < \pi$ とする。
- (2) $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ に垂直な単位ベクトル $\vec{n}$ を求めなさい。
- (3) 3 点 O, A, B を通る平面 α の方程式を求めなさい。
- (4) 点 $C(-1, -2, 3)$ 、点 $D(5, 6, 5)$ の両端を直径とする球 S の方程式を求めなさい。
- (5) 平面 α が球 S を 2 つの半球に分割することを示しなさい。

基本演習 24 [東北大 2011] xyz 空間に、点 $P(0, 0, 5)$ を通る直線 l と、点 $Q(0, 4, 2)$ を中心とする半径 r (ただし $r > 0$) の球面 S がある。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 球面 S と接する直線 l が存在するための r の範囲を求めよ。
- (2) $r = 1$ とし、点 P に点光源を置いたとき、 xy 平面上にできる球面 S の影を領域 R とする。領域 R を表す不等式を求めよ。
- (3) 領域 R の面積を求めよ。

基本演習 25 [東京大 2001] 半径 a の球を考える。ただし、球の中心は原点とする。

- (1) 球面上の任意の点 P の位置ベクトルを $\vec{r}$ とおくと、この点で球面に接する平面上の点の位置ベクトル $\vec{f}$ が満たす方程式を示せ。
- (2) 上記 (1) で求めた接平面と x 軸との交点を求めよ。ただし、 x 方向の単位ベクトルを $\vec{m}_x$ とする。
- (3) 上記 (2) で求めた交点の x 座標が $3a$ となるような、球面上の点 P の位置ベクトル $\vec{r}$ が満たす方程式を求めよ。また、そのような点 P の集まりはどのような図形を描くか、図を用いて説明せよ。

基本演習 26 [名古屋工業大 2010]

4 点 $P(1, 3, 2)$, $Q(1, 1, a+2)$, $R(4, 0, 2)$, $S(a+1, 6, -3)$ が同一平面上にあるとき, a の値を求めよ.

基本演習 27 [名古屋工業大 2023] 座標空間において 3 つの平面

$$x + 3z = a, \quad x + (a+1)y - z = -1, \quad x + 6y - 9z = a - 6$$

の共通部分が直線 l であるとき, 定数 a の値および直線 l の方程式を求めよ.

基本演習 28 [三重大 2014] 空間ベクトルである $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について,

(1)~(3) に答えなさい.

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度を求めよ.

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直で, 大きさが $\sqrt{3}$ となるベクトル $\vec{c}$ を求めよ.

(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に 60° の角度をなし, 大きさが $\sqrt{6}$ となるベクトル $\vec{d}$ を求めよ.

基本演習 29 [広島大 2001] 4 点 $A(1, 0, 7)$, $B(2, 1, 8)$, $C(1, 0, 3)$, $D(2, 2, 9)$ を頂点とする 4 面体の体積を求めよ.**基本演習 30 [広島市立大 2013] 3 次元直交座標系 xyz での平面と直線の関係について, 以下の問いに答えよ.**

(1) 3 点 $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, -1, 0)$ を通る平面 π の方程式を求めよ.

(2) 2 点 $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ を通る直線 l と平面 π の交点の座標を求めよ.

(3) 直線 l を含み, 平面 π に対して垂直な平面の方程式を求めよ.

基本演習 31 [九州大 2009]

xyz -空間に, 4 点 $P(-1, 1, 1)$, $Q(-1, 2, 2)$, $R(0, 2, 0)$, $S(1, -1, -1)$ がある. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\vec{PQ}$, $\vec{PR}$ のなす角を求めよ.

(2) xyz -空間において平面の方程式は, 一般に, 適当な定数 a, b, c, d により $ax + by + cz = d$ と表される. 3 点 P, Q, R を通る平面の方程式を求めよ.

(3) 点 S から, 3 点 P, Q, R を通る平面に垂線を下ろした足を点 H とする. ベクトル $\vec{SH}$ を求めよ.

(4) 3 角錐 $PQRS$ の体積を求めよ.

基本演習 32 [鹿児島大 2012] 直交座標系 $O - XYZ$ において, 平面 $C_A : x + y = 0$ と平面 $C_B : 5y + z = 0$ がある. 次の問いに答えよ.

(1) 両平面の法線ベクトルを求めよ. さらに, 両平面の交線にある交線ベクトルを求めよ.

(2) 上記の交線ベクトルを平面 C_P の法線ベクトルとして, 点 $P(1, 2, 1)$ を含んで平面 C_A と平面 C_B にそれぞれ直交する平面 C_P を求めよ.

基本演習 33 [鹿児島大 2018] 原点 $O(0, 0, 0)$ を有する直交座標系 xyz において, 点 $A(1, 0, 1)$, 点 $B(1, 1, 0)$ がある. 以下の問いに答えよ.

(1) 線分 OA と線分 OB のなす角 θ を求めよ.

(2) 原点 O を中心とし, 表面が線分 AB に接する球の方程式を求めよ.

(3) 点 O, A, B を含む平面に平行で, 点 $C(1, 1, 1)$ を含む平面の方程式を求めよ.

基本演習 34 [東京都立大 2021] 3 次元空間内に原点 $O(0, 0, 0)$ および 3 点

$$A(0, 2 + 2\sqrt{3}, 0), B(2 - \sqrt{6}, 2\sqrt{3} - \sqrt{6}, 2\sqrt{3}), C(2 + 2\sqrt{3}, 0, 0)$$

がある. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ のなす角を求めよ.

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ.

(3) 四面体 $OABC$ において, 三角形 ABC を底面としたときの高さを求めよ.

4.3 基本的な事実**■ a, b の作る三角形の面積 :**

$$\frac{1}{2} |a \times b|$$

■ a, b, c の作る平行六面体の体積 :

$$|(a \times b) \cdot c|$$

■ 底面積 S 、高さ h の錐体の体積 :

$$\frac{1}{3} Sd$$

■ 点 (p, q, r) を通り、 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直な平面 :

$$a(x - p) + b(y - q) + c(z - r) = 0$$

■ 点 (u, v, w) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ の距離 :

$$\frac{|au + bv + cw + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

4.4 Exercise 解答例

4.4.1 基礎

基本演習 3 [熊本大 2021] 3 点 $(1, 2, 3), (1, -1, 2), (2, 3, 1)$ を通る平面の方程式を求めよ。

$A(1, 2, 3), B(1, -1, 2), C(2, 3, 1)$ とすると

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, & \vec{AC} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

なので、平面の方程式は

$$7(x-1) - (y-2) + 3(z-3) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 7x - y + 3z - 14 = 0$$

です。

基本演習 4 [三重大 2003] 3 点 $P_1(3, -2, -1), P_2(1, 3, 4), P_3(2, 1, -2)$ を通る平面の方程式を求めよ。また、その平面と原点 O との最短距離を求めよ。

$$\begin{aligned}\vec{P_1P_2} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, & \vec{P_1P_3} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

従って平面の方程式は

$$20(x-3) + 7(y+2) + (z+1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 20x + 7y + z - 45 = 0$$

であり、原点との最短距離は

$$\frac{|-45|}{\sqrt{20^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{45}{15\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

です。

基本演習 5 [福井大 2001] 三つのベクトル $A(2, 3, 4), B(1, 2, 1), C(3, 1, 2)$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ。

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = |6 + 3 - 20| = 11$$

□

基本演習 6 [筑波大 2006] (1) 2 つのベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ のなす角を求めなさい。

(2) 2 つのベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の両方に直交する単位ベクトルを求めなさい。解答する単位ベクトルは一つでよい。

(3) 3 点 $A(2, 1, 3), B(3, 1, 1), C(1, 4, 4)$ を通る平面の方程式を求めなさい。

(1) なす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{-2}{2 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ですから、 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ です。

(2)

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ですから

$$\frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

は問題の条件を満たします。

(3)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 6(x-2) + 1(y-1) + 3(z-3) &= 0 \\ 6x + y + 3z - 22 &= 0 \end{aligned}$$

□

基本演習 7 [北見工業大 2011] ベクトル $\vec{N} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に直交し, 点 $(-1, 2, 3)$ を通る平面の方程式を求めよ.

$$2(x+1) + 2(y-2) - (z-3) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 2x + 2y - z + 1 = 0$$

です。

□

基本演習 8 [北見工業大 2017] ベクトル $\vec{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に直交し, 点 $(0, 1, 2)$ を通る平面の方程式を求めよ.

$$x + 2(y-1) - (z-2) = 0 \quad \text{すなわち} \quad x + 2y - z = 0$$

です。

□

基本演習 9 [北見工業大 2012] 平面 $x + y + z = 0$ および平面 $x + 2y + 3z = 0$ と直交し, 原点を通る平面の方程式を求めよ.

それぞれの平面の法線ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であり、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ですから、問題の条件を満たす平面は

$$x - 2y + z = 0$$

です。

□

4.4.2 標準

基本演習 10 [静岡大 2013]

空間内に 4 点 $A(1, 1, 1), B(2, 3, 2), C(-2, 0, 3), D(0, 2, 5)$ をとる. 3 点 A, B, C を含む平面を π とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 平面 π の方程式を求めよ.
- (2) 点 D を通り平面 π に垂直な直線の方程式を求めよ.
- (3) 点 D と平面 π との距離を求めよ.
- (4) 三角形 ABC の面積を求めよ.
- (5) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ.

(1)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi: (x-1) - (y-1) + (z-1) = 0 \quad \text{従って} \quad x - y + z - 1 = 0$$

(2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

(3)

$$\frac{|-2+5-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(4)

$$\frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

(5)

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3}$$

□

基本演習 11 [北海道大 2021]

3次元空間にある次の2つの平面について、以下の設問に答えなさい。

$$\begin{cases} \text{平面 1:} & x + y + \sqrt{2}z = 0 \\ \text{平面 2:} & x + y = 0 \end{cases}$$

(1) 平面1の法線ベクトルと平面2の法線ベクトルをひとつずつ求めなさい。

(2) (1) で求めた2つの法線ベクトルのなす角を求めなさい。ただし、答えは0以上 π 以下とすること。

(3) (1) で求めた2つの法線ベクトルの両方と直交するベクトルのうち、大きさが1であるものをひとつ求めなさい。

(1)

$$\text{平面 1:} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \text{平面 2:} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) 成す角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + \sqrt{2}^2} \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ですから、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ です。

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

基本演習 12 [岩手大 2017]

3次元空間上に存在する3点 $A(0, 1, -1), B(2, 0, 3), C(1, 1, 0)$ について、次の問いに答えなさい。

(1) 3点 A, B, C を通る平面の方程式を求めなさい。

(2) (1) の平面の単位法線ベクトルを求めなさい。

(3) 原点を通り、(2) の単位法線ベクトルに平行な直線の方程式を求めなさい。

(4) (1) の平面と (3) の直線との交点の座標を求めなさい。

(1)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ですから、

$$-1(x-0) + 2(y-1) + 1(z-1) = 0, \quad \text{すなわち} \quad -x + 2y + z - 3 = 0$$

です。

(2)

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

(4)

$$t + 4t + t - 3 = 0$$

$$t = \frac{1}{2}$$

ですから交点は $(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ です。

□

基本演習 13 [秋田大 2022] xyz 座標空間に3点 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 2)$ があると
する。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) 2つのベクトル $\vec{CA}, \vec{CB}$ と直交するベクトルを求めなさい。

(2) 3点 A, B, C を通る平面の方程式を求めなさい。

(3) (2) の平面に関して点 $D(0, 0, 1)$ と対称な点を E とする。点 E の座標を求めなさい。

(1)

$$\vec{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CA} \times \vec{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$2(x-1) + 2y + z = 0, \quad \text{従って} \quad 2x + 2y + z - 2 = 0$$

(3) 点 D を通り (2) の平面に垂直な直線の方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

です。この直線と (2) の平面との交点は

$$2(2t) + 2(2t) + (1+t) - 2 = 0$$

$$t = \frac{1}{9}$$

に対応する点ですから、対称点は $t = \frac{2}{9}$ に対応し、

$$\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{11}{9} \right)$$

です。

□

基本演習 14 [筑波大 2007] 球面 $C: x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 4z - 8 = 0$ について以下の問いに答えよ。

- (1) C が yz 平面と交わってできる円の中心と半径を求めよ。
- (2) C が y 軸から切り取る線分の長さを求めよ。
- (3) C 上の点 $A(6, 2, 2)$ における接平面の方程式を求めよ。

(1) $x = 0$ と置けば

$$y^2 + z^2 - 4y + 4z = 8$$

$$(y-2)^2 + (z+2)^2 = 16$$

ですから、中心は $(0, 2, -2)$ 、半径は 4 です。(2) $x = z = 0$ と置けば

$$y^2 - 4y - 8 = 0$$

$$(y-2)^2 = 12$$

ですから、 y 軸との交点の y 座標は $2 \pm 2\sqrt{3}$ です。
従って線分の長さは $4\sqrt{3}$ です。

(3) C の中心 Q は $Q(3, 2, -2)$ ですから接平面は

$$\vec{QA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

に直交しますから、その方程式は

$$3(x-3) + 4(z+2) = 0, \quad \text{すなわち} \quad 3x + 4z - 1 = 0$$

です。

□

基本演習 15 [富山大 2004]

3次元空間 $O-xyz$ に 3 点 $A(1, 2, 3), B(2, 2, 1), C(1, 3, 1)$ がある。ベクトル $\vec{a} = \vec{CA}, \vec{b} = \vec{CB}$ として、以下の問いに答えよ。

- (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のそれぞれの長さを求めよ。
- (2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき、 $\cos \theta$ を求めよ。
- (3) 三角形 ABC の面積 S を求めよ。
- (4) 点 B は原点 O から平面 ABC への垂線の足であることを示せ。
- (5) 三角錐 $OABC$ の体積 V を求めよ。

(1)

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5}, \quad |\vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2}$$

(2)

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

(3)

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{5}\sqrt{2} \sin \theta = \frac{3}{2}$$

(4)

$$\vec{OB} \cdot \vec{CA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0, \quad \vec{OB} \cdot \vec{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

ですから、線分 OB は平面 ABC に直交します。

(5)

$$OB = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

ですから、

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

です。

□

基本演習 16 [静岡大 2011]

xyz 空間内に 4 点 $A(1, 0, 2), B(-1, 1, 1), C(0, 2, 6), D(4, 2, -1)$ が与えられている。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 3 点 A, B, C を通る平面 π の方程式を求めよ。
- (2) 平面 π と点 D の距離を求めよ。
- (3) 点 D から平面 π に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

(1)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\pi: 2(x-1) + 3y - (z-2) = 0, \quad \text{すなわち} \quad 2x + 3y - z = 0$$

(2)

$$\frac{|8 + 6 + 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{14}}$$

(3) D を通り π に直交する直線は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

です。

$$2(4 + 2t) + 3(2 + 3t) - (-1 - t) = 0$$

$$14t + 15 = 0$$

$$t = -\frac{15}{14}$$

によれば

$$H \left(\frac{13}{7}, -\frac{17}{14}, \frac{1}{14} \right)$$

です。

□

基本演習 17 [豊橋技科大 2004]

空間の直交座標軸上に 3 点 $A(3, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 2)$ がある。以下の各問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\vec{AB}$ とベクトル $\vec{AC}$ を成分で表し、それぞれの大きさを求めよ。
- (2) 三角形 ABC の面積を求めよ。
- (3) 3 点を通る平面を α とするとき、原点 O から α に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

(1)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left| \vec{AB} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 3\sqrt{2}, \quad \left| \vec{AC} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{13}$$

(2) 簡単な三角形なので、普通に底辺・高さを計算しても行けませんが、ここではクロス積を使って計算します。

$$\frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right| = \frac{3}{2} \sqrt{17}$$

(3) α の方程式は

$$2(x-3) + 2y + 3z = 0$$

です。また O を通り α に直交する直線は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

ですから垂線の足は

$$2(2t-3) + 4t + 9t = 0$$

$$17t = 6$$

$$t = \frac{6}{17}$$

に対応する点であって、

$$H\left(\frac{12}{17}, \frac{12}{17}, \frac{18}{17}\right)$$

です。

□

基本演習 18 [豊橋技科大 2012] 以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ がある。ただし, c_1, c_2, c_3 は実数で

ある。 $\vec{c}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に直交し, $\vec{c}$ の大きさは 9 である。 $\vec{c}$ を求めよ。

(2) 直交座標空間内に, 点 $D(3, -4, 2)$ を通りベクトル $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に平行な直線がある。

さらに点 $E(5, -6, 4)$ を中心とした半径 6 の球がある。直線と球との交点の座標 (x, y, z) を求めよ。

(1)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

従って

$$\vec{c} = \pm \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

です。

(2) 直線の方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

であり、球面の方程式は

$$(x-5)^2 + (y+6)^2 + (z-4)^2 = 36$$

ですから、交点は

$$(3+t-5)^2 + (-4-t+6)^2 + (2-4)^2 = 36$$

$$(t-2)^2 = 16$$

$$t = -2, 6$$

に対応する点です。

従って交点の座標は

$$(1, -2, 2), \quad (9, -10, 2)$$

です。

□

基本演習 19 [三重大 2022] $-x + 2\sqrt{2}y - 4z = 1$ で表される平面 A と, $2x + 2z = 1$ で表される平面 B がある。この 2 つの平面に関する以下の各問に答えなさい。

- (1) この 2 つの平面のなす角は何度になるか求めなさい。
- (2) この 2 つの平面の交線の方程式を求めなさい。
- (3) この 2 つの平面の交線を含み, かつ原点を通る平面の方程式を求めなさい。

(1) 2 平面の成す角を θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすると、

$$\cos \theta = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{2} \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2 + (-4)^2} \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{10}{5 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ですから、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ です。

(2) B の方程式から $x = -z + \frac{1}{2}$ であり、これを A の方程式に代入して $y = \frac{3}{2\sqrt{2}}z + \frac{3}{4\sqrt{2}}$ です。従って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2\sqrt{2}}z + \frac{3}{4\sqrt{2}} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となりますから、直線の方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

です。あるいは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 3 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

などとも書けますね。

(3) 問題の平面は直線の方角ベクトルと、原点から直線上の点 $(1, 0, -\frac{1}{2})$ へのベクトルの双方に直交するベクトルを法線ベクトルとしますから、

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 3 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2\sqrt{2} \\ 6 \end{pmatrix}$$

が法線ベクトルであり、原点を通るので、方程式は

$$3x - 2\sqrt{2}y + 6z = 0$$

です。

□

基本演習 20 [宮崎大 2001] 3点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 2, 1)$, $B(2, 0, -1)$ がある。2つのベクトル $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ で張られる平面上の点で点 $C(6, 1, 5)$ までの距離を最小にする点 X の座標を求めよ。

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ですから $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ で張られる平面は

$$2x - 3y + 4z = 0$$

です。

また C を通りこの平面に垂直な直線は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

ですから、交点 X は

$$\begin{aligned} 2(6 - 2t) - 3(1 + 3t) + 4(5 - 4t) &= 0 \\ 29 - 29t &= 0 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

に対応する点であって

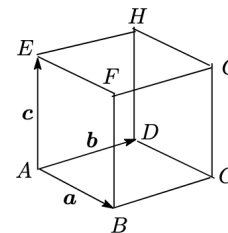
$$X(4, 4, 1)$$

です。

□

基本演習 21 [鹿児島大 2007] 右図の立方体 $ABCD - EFGH$ において、ベクトル $\vec{ED}$ と $\vec{EC}$ のなす角 θ の余弦を求めよ。ただし、ベクトル $\mathbf{a} = \vec{AB}$, $\mathbf{b} = \vec{AD}$, $\mathbf{c} = \vec{AE}$ は、互い

に直交しており、その長さはともに l である。



$l = 1$ としても角度は変わりません。そのうえで

$$A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), D(0, 1, 0), E(0, 0, 1)$$

となるように座標を定めておきます。すると

$$\vec{ED} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{EC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ですから

$$\cos \theta = \frac{\vec{ED} \cdot \vec{EC}}{|\vec{ED}| |\vec{EC}|} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

です。

□

基本演習 22 [鹿児島大 2021] 点 $O(0, 0, 0)$ を原点とする 3 次元直交座標系 $O - xyz$ において、点 $A(0, 1, 0)$, 点 $B(1, 0, 2)$ がある。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 A と点 B を通る直線 l の方程式を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ の面積 S を求めよ。
- (3) 点 O から直線 l に下ろした垂線の長さ d を求めよ。

(1)

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

(2)

$$S = \frac{1}{2} \left| \vec{OA} \times \vec{OB} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(3)

$$AB = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

ですから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot d \\ \frac{\sqrt{5}}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{6} d \\ d &= \sqrt{\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

です。

□

4.4.3 応用

基本演習 23 [岩手大 2022] 原点 O の xyz 空間に点 $A(2, 1, 3)$, 点 $B(3, -2, 1)$ が与えられている。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ のなす角 θ を求めなさい。ただし、 $0 \leq \theta < \pi$ とする。
- (2) $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ に垂直な単位ベクトル $\vec{n}$ を求めなさい。
- (3) 3 点 O, A, B を通る平面 α の方程式を求めなさい。
- (4) 点 $C(-1, -2, 3)$, 点 $D(5, 6, 5)$ の両端を直径とする球 S の方程式を求めなさい。
- (5) 平面 α が球 S を 2 つの半球に分割することを示しなさい。

(1)

$$\cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{OA \cdot OB} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{2}$$

ですから $\theta = \frac{\pi}{3}$ です。

(2)

$$\begin{aligned} \vec{OA} \times \vec{OB} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} // \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{n} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3)

$$\alpha: x + y - z = 0$$

(4) CD の中点 E は

$$E(2, 2, 4)$$

であり、

$$ED = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{26}$$

ですから、球 S の方程式は

$$S: (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 26$$

です。

(5) 平面 α は球の中心 $E(2, 2, 4)$ を通るので、確かに 2 つの半球に分割します。

□

基本演習 24 [東北大 2011] xyz 空間に、点 $P(0, 0, 5)$ を通る直線 l と、点 $Q(0, 4, 2)$ を中心とする半径 r (ただし $r > 0$) の球面 S がある。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 球面 S と接する直線 l が存在するための r の範囲を求めよ。
- (2) $r = 1$ とし、点 P に点光源を置いたとき、 xy 平面上にできる球面 S の影を領域 R とする、領域 R を表す不等式を求めよ。
- (3) 領域 R の面積を求めよ。

(1) 球の外部あるいは球の表面上の点からは必ず球面への接線が引けますから、問題の条件は点 P が S の表面及び外部にあることであって、

$$\begin{aligned} 0^2 + 4^2 + 3^2 &\geq r^2 \\ 25 &\geq r^2 \\ 5 &\geq r \end{aligned}$$

つまり、 $0 < r \leq 5$ であれば良いことが分かります。(2) $X(x, y, 0)$ とするとき、直線 PX がこの球に接する条件は

$$\frac{\vec{PX} \cdot \vec{PQ}}{PX \cdot PQ} = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

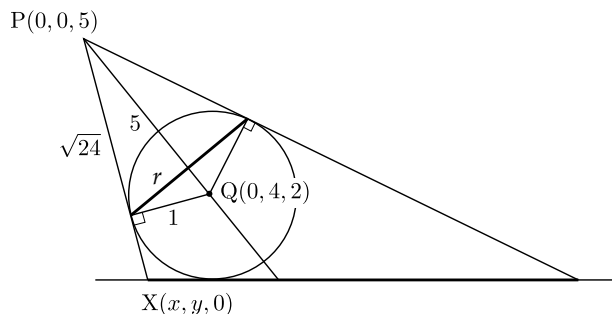
ですから、接線全体の作る円錐面と xy 平面との交線の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{4y + 15}{5\sqrt{x^2 + y^2 + 25}} &= \frac{\sqrt{24}}{5} \\ (4y + 15)^2 &= 24(x^2 + y^2 + 25) \\ 0 &= 24x^2 + 8y^2 - 120y + 375 \end{aligned}$$

であり、問題の領域はこの楕円の内部です。従って

$$R: 24x^2 + 8y^2 - 120y + 375 \leq 0$$

です。



(3)

$$24x^2 + 8y^2 - 120y + 375 = 0$$

$$24x^2 + 8\left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = 75$$

$$x^2 + \frac{\left(y - \frac{15}{2}\right)^2}{3} = \frac{25}{8}$$

従って面積は

$$\frac{25}{8}\pi \cdot \sqrt{3}$$

です。

□

基本演習 25 [東京大 2001] 半径 a の球を考える。ただし、球の中心は原点とする。

(1) 球面上の任意の点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とおくと、この点で球面に接する平面上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{f}$ が満たす方程式を示せ。

(2) 上記 (1) で求めた接平面と x 軸との交点を求めよ。ただし、 x 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{m}_x$ とする。

(3) 上記 (2) で求めた交点の x 座標が $3a$ となるような、球面上の点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ が満たす方程式を求めよ。また、そのような点 P の集まりはどのような図形を描くか、図を用いて説明せよ。

(1) 半径は 0 ではないので、点 P は原点ではなく、この接平面の法線ベクトルは $\boldsymbol{x}$ ですから、接平面の方程式は

$$\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{x}) = 0$$

です。これはまた

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f} = a^2$$

とも書けます。

(2) 点 $(f_1, 0, 0)$ が接平面上にある条件は

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a^2$$

$$r_1 f_1 = a^2$$

ですから、 $r_1 = \boldsymbol{m}_x \cdot \boldsymbol{x} \neq 0$ であるときそのような点が存在して、座標は

$$\left(\frac{a^2}{r_1}, 0, 0\right) = \left(\frac{a^2}{\boldsymbol{m}_x \cdot \boldsymbol{x}}, 0, 0\right)$$

です。

(3) このとき

$$r_1 3a = a^2, \quad r_1 = \frac{a}{3}$$

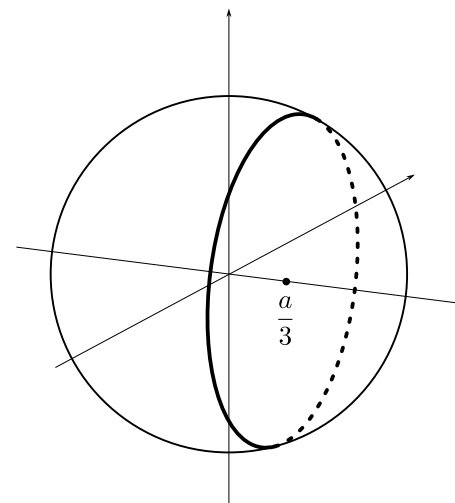
です。従って

$$\boldsymbol{m}_x \cdot \boldsymbol{x} = \frac{a}{3}$$

であれば良いことが分かります。ここで $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{m}_x$ の成す角を θ と置けば、

$$\cos \theta = \frac{\boldsymbol{m}_x \cdot \boldsymbol{x}}{1 \cdot a} = \frac{1}{3}$$

ですから、点 P の集まりは下図のような球面上の円周となります：



□

基本演習 26 [名古屋工業大 2010]

4 点 $P(1, 3, 2)$, $Q(1, 1, a+2)$, $R(4, 0, 2)$, $S(a+1, 6, -3)$ が同一平面上にあるとき, a の値を求めよ.

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{PR} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{PS} = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3a \\ 6 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

よれば 3 点 P, Q, R は同一直線上にはなく、この 3 点で 1 つの平面を定めています。

点 S が平面 PQR 上にあるための条件は

$$0 = (\vec{PQ} \times \vec{PR}) \cdot \vec{PS} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3a \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 3a^2 + 9a - 30 = 3(a+5)(a-2)$$

であって、 $a = -5, 2$ です。

□

基本演習 27 [名古屋工業大 2023] 座標空間において 3 つの平面

$$x + 3z = a, \quad x + (a+1)y - z = -1, \quad x + 6y - 9z = a - 6$$

の共通部分が直線 l であるとき, 定数 a の値および直線 l の方程式を求めよ.

それぞれの法線ベクトルを $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ とします:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ですから、共通部分が直線になるための条件は

$$0 = \vec{n}_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 + 2(a+1) - 1 = 2a - 2$$

であって、 $a = 1$ です。

このとき平面は

$$x + 3z = 1, \quad x + 2y - z = -1, \quad x + 6y - 9z = -5$$

であって、これを解けば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3z \\ 2z-1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となりますから、直線 l の方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

です。

□

基本演習 28 [三重大 2014] 空間ベクトルである $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について,

(1)~(3) に答えなさい.

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度を求めよ.

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直で、大きさが $\sqrt{3}$ となるベクトル $\vec{c}$ を求めよ.

(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に 60° の角度をなし、大きさが $\sqrt{6}$ となるベクトル $\vec{d}$ を求めよ.

(1) $\vec{a}, \vec{b}$ の成す角を θ とすれば、

$$\cos \theta = \frac{-1+2+2}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

により $\theta = \frac{\pi}{3}$ です。

(2)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

従って求めるベクトル $\vec{c}$ は

$$\pm \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のいずれかです。

(3) $\vec{d} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ と置くと、

$$\begin{aligned} |\vec{d}|^2 &= 6 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 6 \quad \cdots (*) \\ \frac{\vec{d} \cdot \vec{a}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} &= \frac{1}{2} \\ a - b + 2c &= 3 \quad \cdots (**) \\ \frac{\vec{d} \cdot \vec{b}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} &= \frac{1}{2} \\ -a - 2b + c &= 3 \quad \cdots (***) \end{aligned}$$

(**), (***) から

$$a = 1 - c, \quad b = c - 2$$

ですのでこれを (*) に代入して

$$\begin{aligned} (1 - c)^2 + (c - 2)^2 + c^2 &= 6 \\ 3c^2 - 6c - 1 &= 0 \\ (c - 1)^2 &= \frac{4}{3} \\ c &= 1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

が得られます。従って

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \mp \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \pm \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \\ \pm \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 \end{pmatrix}$$

が得られます。

□

基本演習 29 [広島大 2001] 4点 $A(1, 0, 7), B(2, 1, 8), C(1, 0, 3), D(2, 2, 9)$ を頂点とする 4 面体の体積を求めよ。

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \vec{AB} \times \vec{AD} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

従って $\triangle ABD$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AD} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

です。

また、平面 ABD の方程式は

$$0(x - 1) - (y - 0) + 1(z - 7) = 0 \quad \text{すなわち} \quad -y + z - 7 = 0$$

であり、点 C を通り平面 ABD に垂直な直線は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ですから、この直線と平面の交点は

$$\begin{aligned} -(-t) + (3 + t) - 7 &= 0 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

に対応しており、三角形 ABD を底面と見たときの 4 面体の高さは $2\sqrt{2}$ です。

以上から 4 面体の体積は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{2}{3}$$

です。

□

基本演習 30 [広島市立大 2013] 3 次元直交座標系 xyz での平面と直線の関係について、以下の問いに答えよ。

- (1) 3 点 $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, -1, 0)$ を通る平面 π の方程式を求めよ。
- (2) 2 点 $(0, 1, 0), (1, 1, 1)$ を通る直線 l と平面 π の交点の座標を求めよ。
- (3) 直線 l を含み、平面 π に対して垂直な平面の方程式を求めよ。

(1) $A(1, 1, 0), B(0, 1, 1), C(0, -1, 0)$ とします。

$$\begin{aligned} \vec{CA} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{CA} \times \vec{CB} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

従って平面 π は

$$\pi: \quad 2x - (y + 1) + 2z = 0 \quad \text{すなわち} \quad 2x - y + 2z - 1 = 0$$

です。

(2) 直線 l は

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

ですから、交点は

$$\begin{aligned} 2(t) - (1) + 2(t) - 1 &= 0 \\ t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

に対応する点ですから、その座標は

$$\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

です。

(3) 直線 l を含むので点 $(0, 1, 0)$ を通り、平面 π に垂直なので、直線 l の方向ベクトルと平面 π の法線ベクトルの双方に垂直なベクトルが法線ベクトルとなります。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

従って求める平面の方程式は

$$x + y - z - 1 = 0$$

です。

□

基本演習 31 [九州大 2009]

xyz -空間に、4 点 $P(-1, 1, 1), Q(-1, 2, 2), R(0, 2, 0), S(1, -1, -1)$ がある。このとき、次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\vec{PQ}, \vec{PR}$ のなす角を求めよ。

(2) xyz -空間において平面の方程式は、一般に、適当な定数 a, b, c, d により $ax + by + cz = d$ と表される。3 点 P, Q, R を通る平面の方程式を求めよ。

(3) 点 S から、3 点 P, Q, R を通る平面に垂線を下ろした足を点 H とする。ベクトル $\vec{SH}$ を求めよ。

(4) 3 角錐 $PQRS$ の体積を求めよ。

(1)

$$\vec{PQ} \cdot \vec{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

従って成す角は $\frac{\pi}{2}$ です。

(2)

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

従って平面の方程式は

$$2(x - 0) - 1(y - 2) + 1(z - 0) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 2x - y + z + 2 = 0$$

です。

(3) 垂線の方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

ですから、垂線の足、すなわち交点は

$$\begin{aligned} 2(1 + 2t) - (-1 - t) + (-1 + t) + 2 &= 0 \\ 6t + 4 &= 0 \\ t &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

に対応する点ですから、

$$H\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right), \quad \vec{SH} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

です。

(4) 三角形 PQR の面積は

$$\frac{1}{2} \left| \vec{PQ} \times \vec{PR} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{6}$$

であり、また

$$SH = \frac{2}{3} \sqrt{6}$$

ですから、体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2}{3}$$

です。

□

基本演習 32 [鹿児島大 2012] 直交座標系 $O-XYZ$ において、平面 $C_A: x + y = 0$ と平面 $C_B: 5y + z = 0$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 両平面の法線ベクトルを求めよ。さらに、両平面の交線にある交線ベクトルを求めよ。

(2) 上記の交線ベクトルを平面 C_P の法線ベクトルとして、点 $P(1, 2, 1)$ を含んで平面 C_A と平面 C_B にそれぞれ直交する平面 C_P を求めよ。

(1) 平面 C_A は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、平面 C_B は $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

また、 C_A の方程式から $z = -5y$ 、 C_B の方程式から $x = -y$ ですから、交線の方方向ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

です。

(2)

$$C_P: (x-1) - (y-2) + 5(z-1) = 0$$

あるいは整理して

$$C_P: x - y + 5z - 4 = 0$$

です。

□

基本演習 33 [鹿児島大 2018] 原点 $O(0,0,0)$ を有する直交座標系 xyz において、点 $A(1,0,1)$ 、点 $B(1,1,0)$ がある。以下の問いに答えよ。

- (1) 線分 OA と線分 OB のなす角 θ を求めよ。
- (2) 原点 O を中心とし、表面が線分 AB に接する球の方程式を求めよ。
- (3) 点 O, A, B を含む平面に平行で、点 $C(1,1,1)$ を含む平面の方程式を求めよ。

(1)

$$\cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{OA \cdot OB} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

ですから $\theta = \frac{\pi}{3}$ です。

(2) 線分 AB は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

ですので、接点を $(1, t, 1-t)$ として球の中心と接点を結ぶ線分が線分 AB と直交することから

$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2t - 1$$

となって $t = \frac{1}{2}$ が得られますので、確かにそのような球は存在し、半径 R は

$$R^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

です。従って球の方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2}$$

です。

(3)

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ですから問題の平面は

$$-(x-1) + 1(y-1) + 1(z-1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad -x + y + z - 1 = 0$$

です。

□

基本演習 34 [東京都立大 2021] 3次元空間内に原点 $O(0,0,0)$ および 3 点

$$A(0, 2+2\sqrt{3}, 0), B(2-\sqrt{6}, 2\sqrt{3}-\sqrt{6}, 2\sqrt{3}), C(2+2\sqrt{3}, 0, 0)$$

がある。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ のなす角を求めよ。
- (2) 三角形 ABC の面積を求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ において、三角形 ABC を底面としたときの高さを求めよ。

(1)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{6} \\ -\sqrt{6}-2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{3} \\ -2-2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = (2+2\sqrt{3}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \sqrt{(2-\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{6}-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}, \quad AC = 2(1+\sqrt{3})\sqrt{2}$$

問題の角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{\begin{pmatrix} 2-\sqrt{6} \\ -\sqrt{6}-2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{3} \\ -2-2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}}{AB \cdot AC} = \frac{8(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2} \cdot 2(1+\sqrt{3})\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

ですから $\theta = \frac{\pi}{3}$ です。

(2)

$$\frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2-\sqrt{6} \\ -\sqrt{6}-2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{3} \\ -2-2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + \sqrt{3}) \left| \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} - 2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= (1 + \sqrt{3}) \left| \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} \right| \\
&= 4\sqrt{3}(1 + \sqrt{3}) \\
&= 4(3 + \sqrt{3})
\end{aligned}$$

(3)

$$\vec{AB} \times \vec{AC} // \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ですから平面 ABC の方程式は

$$1(x - 0) + 1(y - 2 - 2\sqrt{3}) + \sqrt{2}(z - 0) = 0 \quad \text{すなわち} \quad x + y + \sqrt{2}z - 2 - 2\sqrt{3} = 0$$

です。原点からこの平面までの距離は

$$\frac{|-2 - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + \sqrt{2}^2}} = 1 + \sqrt{3}$$

ですからこれが問題の高さです。

□