

空間ベクトル 問題演習

4.1 例題

基本演習 1 [首都大 2018] xyz 座標系において, $A(-1, 3, 2), B(2, 5, 1), C(1, 1, 0)$ の 3 点がある. 以下の問いに答えなさい.

- (1) ベクトル $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$ をそれぞれ求めなさい.
- (2) 2 点 A, B を通る直線の方程式を求めなさい.
- (3) 3 点 A, B, C を含む平面の方程式を求めなさい.

(1)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{CA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ はパラメータ})$$

あるいは

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

(3)

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ですから、求める平面の方程式は

$$3(x-1) - 2(y-1) + 5(z-0) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 3x - 2y + 5z - 1 = 0$$

です。

□

基本演習 2 [電気通信大 2021]

点 O を原点とする座標空間内の 4 点 $A(2, 1, 3), B(1, 1, 2), C(3, 0, 1), D(2, 1, 2)$ を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) 3 点 A, B, C を通る平面 H の方程式を求めよ.
- (2) 平面 H と点 D の距離 d を求めよ. (3) 外積 $\vec{OA} \times \vec{OB}$ を求めよ.
- (4) 三角形 OAB の面積 S を求めよ. (5) 四面体 $OABC$ の体積 V を求めよ.

$$(1) \quad \vec{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ですから、平面 H の式は

$$1(x-3) + 3(y-0) - (z-1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad x + 3y - z - 2 = 0$$

です。

$$(2) \quad d = \frac{|2 + 3 \cdot 1 - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

(3)

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4)

$$S = \frac{1}{2} \left| \vec{OA} \times \vec{OB} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(5) 平面 OAB の方程式は

$$x + y - z = 0$$

ですから、点 C から下ろした垂線の長さ、すなわち、三角形 OAB を底面と見た時の、4 面体 $OABC$ の高さは

$$\frac{|3-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

です。従って 4 面体 $OABC$ の体積は

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

です。

□

4.2 Exercise

■基礎

基本演習 3 [熊本大 2021] 3 点 $(1, 2, 3), (1, -1, 2), (2, 3, 1)$ を通る平面の方程式を求めよ.

基本演習 4 [三重大学 2003] 3 点 $P_1(3, -2, -1), P_2(1, 3, 4), P_3(2, 1, -2)$ を通る平面の方程式を求めよ. また, その平面と原点 O との最短距離を求めよ.

基本演習 5 [福井大 2001] 三つのベクトル $A(2, 3, 4), B(1, 2, 1), C(3, 1, 2)$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ.

基本演習 6 [筑波大 2006] (1) 2 つのベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ のなす角を求めなさい.

(2) 2 つのベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の両方に直交する単位ベクトルを求めなさい. 解答する単位ベクトルは一つでよい.

(3) 3 点 $A(2, 1, 3), B(3, 1, 1), C(1, 4, 4)$ を通る平面の方程式を求めなさい.

基本演習 7 [北見工業大 2011] ベクトル $\vec{N} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に直交し, 点 $(-1, 2, 3)$ を通る平面の方程式を求めよ.

基本演習 8 [北見工業大 2017] ベクトル $\vec{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に直交し, 点 $(0, 1, 2)$ を通る平面の方程式を求めよ.

基本演習 9 [北見工業大 2012] 平面 $x + y + z = 0$ および平面 $x + 2y + 3z = 0$ と直交し, 原点を通る平面の方程式を求めよ.

■標準

基本演習 10 [静岡大 2013]

空間内に 4 点 $A(1, 1, 1), B(2, 3, 2), C(-2, 0, 3), D(0, 2, 5)$ をとる. 3 点 A, B, C を含む平面を π とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 平面 π の方程式を求めよ.
- (2) 点 D を通り平面 π に垂直な直線の方程式を求めよ.
- (3) 点 D と平面 π との距離を求めよ.
- (4) 三角形 ABC の面積を求めよ.
- (5) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ.

基本演習 11 [北海道大 2021]

3 次元空間にある次の 2 つの平面について, 以下の設問に答えなさい.

$$\begin{cases} \text{平面 1 : } & x + y + \sqrt{2}z = 0 \\ \text{平面 2 : } & x + y = 0 \end{cases}$$

- (1) 平面 1 の法線ベクトルと平面 2 の法線ベクトルをひとつずつ求めなさい.
- (2) (1) で求めた 2 つの法線ベクトルのなす角を求めなさい. ただし, 答えは 0 以上 π 以下とすること.
- (3) (1) で求めた 2 つの法線ベクトルの両方と直交するベクトルのうち, 大きさが 1 であるものをひとつ求めなさい.

基本演習 12 [岩手大 2017]

3 次元空間上に存在する 3 点 $A(0, 1, -1), B(2, 0, 3), C(1, 1, 0)$ について, 次の問いに答えなさい.

- (1) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めなさい.
- (2) (1) の平面の単位法線ベクトルを求めなさい.
- (3) 原点を通り, (2) の単位法線ベクトルに平行な直線の方程式を求めなさい.
- (4) (1) の平面と (3) の直線との交点の座標を求めなさい.

基本演習 13 [秋田大 2022] xyz 座標空間に 3 点 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 2)$ があるとす. このとき, 以下の問いに答えなさい.

- (1) 2 つのベクトル $\vec{CA}, \vec{CB}$ と直交するベクトルを求めなさい.
- (2) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めなさい.
- (3) (2) の平面に関して点 $D(0, 0, 1)$ と対称な点を E とする. 点 E の座標を求めなさい.

基本演習 14 [筑波大 2007] 球面 $C: x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 4z - 8 = 0$ について以下の問いに答えよ.

- (1) C が yz 平面と交わってできる円の中心と半径を求めよ.
- (2) C が y 軸から切り取る線分の長さを求めよ.
- (3) C 上の点 $A(6, 2, 2)$ における接平面の方程式を求めよ.

基本演習 15 [富山大 2004]

3 次元空間 $O-xyz$ に 3 点 $A(1, 2, 3), B(2, 2, 1), C(1, 3, 1)$ がある. ベクトル $\vec{a} = \vec{CA}, \vec{b} = \vec{CB}$ として, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のそれぞれの長さを求めよ.
- (2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき, $\cos \theta$ を求めよ.
- (3) 三角形 ABC の面積 S を求めよ.
- (4) 点 B は原点 O から平面 ABC への垂線の足であることを示せ.
- (5) 三角錐 $OABC$ の体積 V を求めよ.

基本演習 16 [静岡大 2011]

xyz 空間内に 4 点 $A(1, 0, 2), B(-1, 1, 1), C(0, 2, 6), D(4, 2, -1)$ が与えられている。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 3 点 A, B, C を通る平面 π の方程式を求めよ。
- (2) 平面 π と点 D の距離を求めよ。
- (3) 点 D から平面 π に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

基本演習 17 [豊橋技科大 2004]

空間の直交座標軸上に 3 点 $A(3, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 2)$ がある。以下の各問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\vec{AB}$ とベクトル $\vec{AC}$ を成分で表し、それぞれの大きさを求めよ。
- (2) 三角形 ABC の面積を求めよ。
- (3) 3 点を通る平面を α とするとき、原点 O から α に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

基本演習 18 [豊橋技科大 2012] 以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ がある。ただし、 c_1, c_2, c_3 は実数である。 $\vec{c}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に直交し、 $\vec{c}$ の大きさは 9 である。 $\vec{c}$ を求めよ。

- (2) 直交座標空間内に、点 $D(3, -4, 2)$ を通りベクトル $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に平行な直線がある。

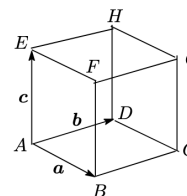
さらに点 $E(5, -6, 4)$ を中心とした半径 6 の球がある。直線と球との交点の座標 (x, y, z) を求めよ。

基本演習 19 [三重大 2022] $-x + 2\sqrt{2}y - 4z = 1$ で表される平面 A と、 $2x + 2z = 1$ で表される平面 B がある。この 2 つの平面に関する以下の各問いに答えなさい。

- (1) この 2 つの平面のなす角は何度になるか求めなさい。
- (2) この 2 つの平面の交線の方程式を求めなさい。
- (3) この 2 つの平面の交線を含み、かつ原点を通る平面の方程式を求めなさい。

基本演習 20 [宮崎大 2001] 3 点 $O(0, 0, 0), A(1, 2, 1), B(2, 0, -1)$ がある。2 つのベクトル $\vec{OA}, \vec{OB}$ で張られる平面上の点で点 $C(6, 1, 5)$ までの距離を最小にする点 X の座標を求めよ。基本演習 21 [鹿児島大 2007] 右図の立方体 $ABCD - EFGH$ において、ベクトル $\vec{ED}$ と $\vec{EC}$ のなす角 θ の余弦を求めよ。ただし、ベクトル $\vec{a} = \vec{AB}, \vec{b} = \vec{AD}, \vec{c} = \vec{AE}$ は、互い

に直交しており、その長さはともに l である。

基本演習 22 [鹿児島大 2021] 点 $O(0, 0, 0)$ を原点とする 3 次元直交座標系 $O - xyz$ において、点 $A(0, 1, 0)$, 点 $B(1, 0, 2)$ がある。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 A と点 B を通る直線 l の方程式を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ の面積 S を求めよ。
- (3) 点 O から直線 l に下ろした垂線の長さ d を求めよ。

■応用

基本演習 23 [岩手大 2022] 原点 O の xyz 空間に点 $A(2, 1, 3)$, 点 $B(3, -2, 1)$ が与えられている。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ のなす角 θ を求めなさい。ただし、 $0 \leq \theta < \pi$ とする。
- (2) $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ に垂直な単位ベクトル $\vec{n}$ を求めなさい。
- (3) 3 点 O, A, B を通る平面 α の方程式を求めなさい。
- (4) 点 $C(-1, -2, 3)$, 点 $D(5, 6, 5)$ の両端を直径とする球 S の方程式を求めなさい。
- (5) 平面 α が球 S を 2 つの半球に分割することを示しなさい。

基本演習 24 [東北大 2011] xyz 空間に、点 $P(0, 0, 5)$ を通る直線 l と、点 $Q(0, 4, 2)$ を中心とする半径 r (ただし $r > 0$) の球面 S がある。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 球面 S と接する直線 l が存在するための r の範囲を求めよ。
- (2) $r = 1$ とし、点 P に点光源を置いたとき、 xy 平面上にできる球面 S の影を領域 R とする。領域 R を表す不等式を求めよ。
- (3) 領域 R の面積を求めよ。

基本演習 25 [東京大 2001] 半径 a の球を考える。ただし、球の中心は原点とする。

- (1) 球面上の任意の点 P の位置ベクトルを $\vec{r}$ とおくと、この点で球面に接する平面上の点の位置ベクトル $\vec{f}$ が満たす方程式を示せ。
- (2) 上記 (1) で求めた接平面と x 軸との交点を求めよ。ただし、 x 方向の単位ベクトルを $\vec{m}_x$ とする。
- (3) 上記 (2) で求めた交点の x 座標が $3a$ となるような、球面上の点 P の位置ベクトル $\vec{r}$ が満たす方程式を求めよ。また、そのような点 P の集まりはどのような図形を描くか、図を用いて説明せよ。

基本演習 26 [名古屋工業大 2010]

4 点 $P(1, 3, 2)$, $Q(1, 1, a+2)$, $R(4, 0, 2)$, $S(a+1, 6, -3)$ が同一平面上にあるとき, a の値を求めよ.

基本演習 27 [名古屋工業大 2023] 座標空間において 3 つの平面

$$x + 3z = a, \quad x + (a+1)y - z = -1, \quad x + 6y - 9z = a - 6$$

の共通部分が直線 l であるとき, 定数 a の値および直線 l の方程式を求めよ.

基本演習 28 [三重大 2014] 空間ベクトルである $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について,

(1)~(3) に答えなさい.

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度を求めよ.

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直で, 大きさが $\sqrt{3}$ となるベクトル $\vec{c}$ を求めよ.

(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に 60° の角度をなし, 大きさが $\sqrt{6}$ となるベクトル $\vec{d}$ を求めよ.

基本演習 29 [広島大 2001] 4 点 $A(1, 0, 7)$, $B(2, 1, 8)$, $C(1, 0, 3)$, $D(2, 2, 9)$ を頂点とする 4 面体の体積を求めよ.**基本演習 30 [広島市立大 2013] 3 次元直交座標系 xyz での平面と直線の関係について, 以下の問いに答えよ.**

(1) 3 点 $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, -1, 0)$ を通る平面 π の方程式を求めよ.

(2) 2 点 $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ を通る直線 l と平面 π の交点の座標を求めよ.

(3) 直線 l を含み, 平面 π に対して垂直な平面の方程式を求めよ.

基本演習 31 [九州大 2009]

xyz -空間に, 4 点 $P(-1, 1, 1)$, $Q(-1, 2, 2)$, $R(0, 2, 0)$, $S(1, -1, -1)$ がある. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\vec{PQ}$, $\vec{PR}$ のなす角を求めよ.

(2) xyz -空間において平面の方程式は, 一般に, 適当な定数 a, b, c, d により $ax + by + cz = d$ と表される. 3 点 P, Q, R を通る平面の方程式を求めよ.

(3) 点 S から, 3 点 P, Q, R を通る平面に垂線を下ろした足を点 H とする. ベクトル $\vec{SH}$ を求めよ.

(4) 3 角錐 $PQRS$ の体積を求めよ.

基本演習 32 [鹿児島大 2012] 直交座標系 $O - XYZ$ において, 平面 $C_A : x + y = 0$ と平面 $C_B : 5y + z = 0$ がある. 次の問いに答えよ.

(1) 両平面の法線ベクトルを求めよ. さらに, 両平面の交線にある交線ベクトルを求めよ.

(2) 上記の交線ベクトルを平面 C_P の法線ベクトルとして, 点 $P(1, 2, 1)$ を含んで平面 C_A と平面 C_B にそれぞれ直交する平面 C_P を求めよ.

基本演習 33 [鹿児島大 2018] 原点 $O(0, 0, 0)$ を有する直交座標系 xyz において, 点 $A(1, 0, 1)$, 点 $B(1, 1, 0)$ がある. 以下の問いに答えよ.

(1) 線分 OA と線分 OB のなす角 θ を求めよ.

(2) 原点 O を中心とし, 表面が線分 AB に接する球の方程式を求めよ.

(3) 点 O, A, B を含む平面に平行で, 点 $C(1, 1, 1)$ を含む平面の方程式を求めよ.

基本演習 34 [東京都立大 2021] 3 次元空間内に原点 $O(0, 0, 0)$ および 3 点

$$A(0, 2 + 2\sqrt{3}, 0), B(2 - \sqrt{6}, 2\sqrt{3} - \sqrt{6}, 2\sqrt{3}), C(2 + 2\sqrt{3}, 0, 0)$$

がある. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ のなす角を求めよ.

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ.

(3) 四面体 $OABC$ において, 三角形 ABC を底面としたときの高さを求めよ.

4.3 基本的な事実**■ a, b の作る三角形の面積 :**

$$\frac{1}{2} |a \times b|$$

■ a, b, c の作る平行六面体の体積 :

$$|(a \times b) \cdot c|$$

■ 底面積 S 、高さ h の錐体の体積 :

$$\frac{1}{3} Sd$$

■ 点 (p, q, r) を通り、 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直な平面 :

$$a(x - p) + b(y - q) + c(z - r) = 0$$

■ 点 (u, v, w) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ の距離 :

$$\frac{|au + bv + cw + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$