

逆行列

1 定義と基本的な性質

定義 1.1 n 次正方行列 M に対して、

$$MP = PM = E_n \quad (\text{ただし、} E_n \text{ は } n \text{ 次の単位行列})$$

となる様な (n 次正方行列) P が存在するとき M は正則であると言います。このとき P は M の逆行列と呼ばれ記号 M^{-1} で表わされます。

一般に行列の掛け算では $MP \neq PM$ ですから $MP = E_n$ であっても $PM = E_n$ であるとは限らない様に思えますが、実は $MP = E_n$ ならば $PM = E_n$ が成り立ちます (逆も同様)。従って $MP = E_n$ (あるいは $PM = E_n$) となる様な行列 P が存在しさえすれば M は正則であり、 P は M の逆行列になります。

事実 1.2 [逆行列の基本的性質]

- (1) M の逆行列は、存在するとしてもただ一つしかありません。
- (2) M, N が共に正則ならばそれらの積 MN も正則であり、

$$(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}.$$

- (3) M が正則ならば M^{-1} も正則であり、 $(M^{-1})^{-1} = M$.
- (4) M が正則ならば tM も正則であり、 $({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$.

これらの事実を証明することは出来ますか？ そんなに難しくありませんので演習問題として考えてみて下さい。

2 逆行列の計算方法

2.1 2 次の場合

事実 2.1 行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ は、 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ のとき正則であり、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

です。

2.2 3 次の場合

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ に逆行列が存在するとしたら、それはどんな行列か見てみましょう。仮に $MA = E$ だったとしましょう (要するに M は A の逆行列です)。 M を (積の左側にあるので) 横線で区切って

$$M = \begin{pmatrix} {}^t u \\ {}^t v \\ {}^t w \end{pmatrix}$$

と置いて計算してみると

$$MA = \begin{pmatrix} {}^t u \\ {}^t v \\ {}^t w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t u a & {}^t u b & {}^t u c \\ {}^t v a & {}^t v b & {}^t v c \\ {}^t w a & {}^t w b & {}^t w c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cdot a & u \cdot b & u \cdot c \\ v \cdot a & v \cdot b & v \cdot c \\ w \cdot a & w \cdot b & w \cdot c \end{pmatrix}$$

となって、これが単位行列に等しいわけですから結局、次の連立方程式：

$$\begin{cases} u \cdot a = 1 \\ u \cdot b = 0 \\ u \cdot c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v \cdot a = 0 \\ v \cdot b = 1 \\ v \cdot c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} w \cdot a = 0 \\ w \cdot b = 0 \\ w \cdot c = 1 \end{cases}$$

が得られます。

まず全体を見渡して言える事は、 a, b, c, u, v, w はいずれもゼロベクトルではありません。例えば $u \cdot a = 1$ はどちらか一方でもゼロベクトルだと成り立ちません。

更に、 a, b, c のどの 2 本も平行ではあり得ません。なぜなら例えば $v \cdot b = 1, v \cdot c = 0$ なので同じ（ゼロでない）ベクトルに一方は直交し一方は直交しないからです。

次に個別に見て行きます。まず一番左の u に関する連立方程式を詳しく見てみましょう。すると、

$$u \cdot b = 0, \quad u \cdot c = 0$$

ですから、 u は b, c の双方に直交しますので $b \times c$ と同じ向きのベクトルである事が解ります。まだ大きさは解りませんので仮に $u = p(b \times c)$ としておきましょう。

しかし、もう 1 本の式 $u \cdot a = 1$ によれば

$$p(b \times c) \cdot a = 1$$

となり、右辺が 0 でないので左辺の各因子も 0 ではなく、

$$p = \frac{1}{(b \times c) \cdot a}$$

である事が解ります。以上により u が求まりました：

$$u = \frac{1}{(b \times c) \cdot a} (b \times c).$$

同様に v, w も求める事が出来て、それぞれ

$$v = \frac{1}{(c \times a) \cdot b} (c \times a), \quad w = \frac{1}{(a \times b) \cdot c} (a \times b)$$

となります。

しかし、クロス積と内積の特別な関係から

$$(b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b = (a \times b) \cdot c$$

だったので、それぞれの前についている係数は全て同じであり、結局行列 M は

$$M = \frac{1}{a \cdot (b \times c)} \begin{pmatrix} {}^t(b \times c) \\ {}^t(c \times a) \\ {}^t(a \times b) \end{pmatrix} = \frac{1}{a \cdot (b \times c)} \begin{pmatrix} b \times c & c \times a & a \times b \end{pmatrix}$$

となってこれが A の逆行列である（転置に注意）事が解ります。

事実 2.2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ が逆行列をもつならば、それは

$$A^{-1} = \frac{1}{a \cdot (b \times c)} \begin{pmatrix} {}^t(b \times c) \\ {}^t(c \times a) \\ {}^t(a \times b) \end{pmatrix} = \frac{1}{a \cdot (b \times c)} \begin{pmatrix} b \times c & c \times a & a \times b \end{pmatrix}$$

です。

2.3 正則性の判定条件

今計算した事は、『 A がもし逆行列を持つなら（つまり正則なら）その逆行列はこうだ』と言う事なのですが、結果的に逆行列は元の行列を構成する各ベクトルのクロス積で作られてるわけですね。で、クロス積は常に計算可能なわけですから、

$$\begin{pmatrix} b \times c & c \times a & a \times b \end{pmatrix}$$

の部分は常に存在する事になります。

では逆行列は常に存在するのか？

いや、そうではありません。それに掛かっている係数、 $\frac{1}{a \cdot (b \times c)}$ が存在しない事があります。つまり $a \cdot (b \times c) \neq 0$ であるかどうかが分かれ目です。

事実 2.3 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ が $a \cdot (b \times c) \neq 0$ を満たすとき、行列

$$\frac{1}{a \cdot (b \times c)} \begin{pmatrix} {}^t(b \times c) \\ {}^t(c \times a) \\ {}^t(a \times b) \end{pmatrix}$$

が存在し、それは A の逆行列です。

2.4 掃き出し法による計算

2.4.1 最も基本的なやり方

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めて下さい。

1	2	3	1	0	0	(1)
2	0	2	0	1	0	(2)
3	2	1	0	0	1	(3)
1	2	3	1	0	0	(1)
0	-4	-4	-2	1	0	(2) - 2(1) = (4)
0	-4	-8	-3	0	1	(3) - 3(1) = (5)
1	2	3	1	0	0	(1)
0	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}(4) = (6)$
0	-4	-8	-3	0	1	(5)
1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	(1) - 2(6) = (7)
0	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	(6)
0	0	-4	-1	-1	1	(5) + 4(6) = (8)
1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	(7)
0	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	(6)
0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}(8) = (9)$
1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	(7) - (9)
0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	(6) - (9)
0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	(9)

従って求める逆行列は $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ である。

2.4.2 上級者向け

行列 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めて下さい。

0	-2	1	1	0	0	(1)
2	3	-2	0	1	0	(2)
4	-1	6	0	0	1	(3)
2	3	-2	0	1	0	(2)
0	-2	1	1	0	0	(1)
4	-1	6	0	0	1	(3)
2	3	-2	0	1	0	(2)
0	-2	1	1	0	0	(1)
0	-7	10	0	-2	1	(3) - 2(2) = (4)
2	3	-2	0	1	0	(2)
0	-2	1	1	0	0	(1)
0	1	6	-4	-2	1	(4) - 4(1) = (5)
2	3	-2	0	1	0	(2)
0	1	6	-4	-2	1	(5)
0	-2	1	1	0	0	(1)
2	0	-20	12	7	-3	(2) - 3(5) = (6)
0	1	6	-4	-2	1	(5)
0	0	13	-7	-4	2	(1) + 2(5) = (7)
26	0	-260	156	91	-39	13(6) = (8)
0	13	78	-52	-26	13	13(5) = (9)
0	0	13	-7	-4	2	(7)
26	0	0	16	11	1	(8) + 20(7) = (10)
0	13	0	-10	-2	1	(9) - 6(7) = (11)
0	0	13	-7	-4	2	(7)
26	0	0	16	11	1	(10)
0	26	0	-20	-4	2	2(11)
0	0	26	-14	-8	4	2(7)

従って求める逆行列は $\frac{1}{26} \begin{pmatrix} 16 & 11 & 1 \\ -20 & -4 & 2 \\ -14 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ である。

2.4.3 正則でない場合

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めて下さい。

1	2	3	1	0	0	(1)
4	5	6	0	1	0	(2)
7	8	9	0	0	1	(3)
1	2	3	1	0	0	(1)
0	-3	-6	-4	1	0	(2) - 4(1) = (4)
0	-6	-12	-7	0	1	(3) - 7(1) = (5)
1	2	3	1	0	0	(1)
0	-3	-6	-4	1	0	(4)
0	0	0	1	-2	1	(5) - 2(4)

従ってこの行列に逆行列は存在しません。

この様に、正則でない行列に対して掃き出し法を適用して行くと、途中で横に0が3つ並んでしまい、次の一手を打てなくなり、ジ・エンドです。逆に言えば、横に0が並ばない限り、最後まで掃き出し法を進める事が出来、逆行列が求まってしまいます。

で、この『横に0が3つ並ぶ』と云うのは何を意味するかと言うと、上の例の場合、象徴的に書いて

$$0 = (5) - 2(4) = (3) - 7(1) - 2\{(2) - 4(1)\} = (1) - 2(2) + (3)$$

であって、これは横ベクターの足し算：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

を意味しています。この様に、行列を3本の横ベクターの並んだものとして見た時に、3本を何倍かして足し合わせてゼロベクターが作れてしまう時は掃き出し法が途中でストップし逆行列が存在しないと云う事になります。

Exercise

基本演習 1 次の各行列の逆行列を、クロス積を使ったやり方と掃き出し法2通りで求めて下さい：

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 9 \\ 4 & 13 & 11 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

基本演習 2 行列 A, B が正則であれば行列 AB も正則であって $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ であることを証明して下さい。

基本演習 3 行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right\}$ を計算して下さい。また、この結果をどこかで見た事はありませんか？

発展演習 4 行列 A, B が正則であって $A + B$ が正則でない例を2次正方行列で考えて下さい。

発展演習 5 (1) $(A - zE)^{-1} - (A - wE)^{-1} = (z - w)(A - zE)^{-1}(A - wE)^{-1}$ であることを示して下さい。

(2) $(A - zE)^{-1} - (B - zE)^{-1} = (A - zE)^{-1}(B - A)(B - zE)^{-1}$ であることを示して下さい。

発展演習 6 実数の世界では $2^{-1} + 3^{-1} = (2 + 3)(2 \cdot 3)^{-1}$ が成り立ちますが、行列ではどうでしょうか？ $A^{-1} + B^{-1} = (A + B)(AB)^{-1}$ は成り立つでしょうか。

発展演習 7 実数の世界では $|x| < 1$ であれば $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ が成り立ちますが、行列の世界において $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots$ が成り立つための条件は何でしょうか？ A は2次正方行列とします。

発展演習 8 2次正方行列 A は $A = A^{-1}$ を満たしているとします。このとき A^6 を求めて下さい。

発展演習 9 2次正方行列 $R = \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix}$ が正則であるとき、 $R^{-1}v, R^{-1}w$ をそれぞれ求めて下さい。

発展演習 10 3次正方行列 $F = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ が正則でない時、3つのベクター a, b, c は幾何学的に言ってどんな関係にありますか？

発展演習 11 (1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ に対して、 $MN = E_2$ となる $(3, 2)$ -型行列 N を1つ求めて下さい。

(2) (1) で求めた N に対して NM を求めて下さい。

(3) $LM = E_3$ となるような $(3, 2)$ -型行列 L は存在するでしょうか？