行列式

1　２次の行列式

定義 1.1　２次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して、$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ の値を A の行列式（determinant）と言い、記号 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ で表します。

２次方程式 $ax^2 + 2bx + c = 0$ の左辺は次のように平方完成されます：

$$ax^2 + 2bx + c = a\left(x^2 + \frac{2b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}$$

従って $ac - b^2$ の符号が解の様子（実数解、複素数解など）を決定（determine）します。これはかなり古くから知られていたことですが、ここで

$$ax^2 + 2bx + c = \begin{pmatrix} x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$$

でありここに行列式の萌芽が見られます。実際行列式（determinant）は行列（matrix）が導入される（19 世紀）ずっと前から（16 世紀頃？）使われていました。

1.1　行列式の性質

事実 1.2

(1) $|{}^tA| = |A|, \quad |AB| = |A||B|$

(2) A が正則 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ であり、A が正則なら $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ です。

(3) $|\mathbb{a} \quad \mathbb{b}| = -|\mathbb{b} \quad \mathbb{a}|, \quad \begin{vmatrix} {}^t\mathbb{a} \\ {}^t\mathbb{b} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} {}^t\mathbb{b} \\ {}^t\mathbb{a} \end{vmatrix}$,　特に　$|\mathbb{a} \quad \mathbb{a}| = 0, \quad \begin{vmatrix} {}^t\mathbb{a} \\ {}^t\mathbb{a} \end{vmatrix} = 0$

(4) $|\mathbb{a} \quad \mathbb{o}| = 0, \quad \begin{vmatrix} {}^t\mathbb{o} \\ {}^t\mathbb{b} \end{vmatrix} = 0$

事実 1.3 (5) $|k_1\mathbb{a}_1 + k_2\mathbb{a}_2 \quad \mathbb{b}| = k_1|\mathbb{a}_1 \quad \mathbb{b}| + k_2|\mathbb{a}_2 \quad \mathbb{b}|$,

$$\begin{vmatrix} {}^t\mathbb{a} \\ k_1{}^t\mathbb{b}_1 + k_2{}^t\mathbb{b}_2 \end{vmatrix} = k_1\begin{vmatrix} {}^t\mathbb{a} \\ {}^t\mathbb{b}_1 \end{vmatrix} + k_2\begin{vmatrix} {}^t\mathbb{a} \\ {}^t\mathbb{b}_2 \end{vmatrix}$$

(6) $|\mathbb{a} \quad \mathbb{b}| = |\mathbb{a} + k\mathbb{b} \quad \mathbb{b}|, \quad \begin{vmatrix} {}^t\mathbb{a} \\ {}^t\mathbb{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^t\mathbb{a} \\ {}^t\mathbb{b} + k{}^t\mathbb{a} \end{vmatrix}$

2　３次の行列式

定義 2.1　３次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して、

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

の値を A の行列式と言い、記号 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ で表します。

実際に計算してみれば分かる通り、３本の３次元ヴェクターを並べて出来た行列 $M = (\mathbb{l} \quad \mathbb{m} \quad \mathbb{n})$ に対して次が成り立ちます：

$$|M| = |\mathbb{l} \quad \mathbb{m} \quad \mathbb{n}| = \mathbb{l} \cdot (\mathbb{m} \times \mathbb{n}).$$

2.1　行列式の性質

事実 2.2

(1) $|{}^tA| = |A|, \qquad |AB| = |A||B|$

(2) 行列 A が正則 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ であり、A が正則ならば $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ です。

事実 2.3

(3) $|\mathbb{a}\quad\mathbb{b}\quad\mathbb{c}| = -|\mathbb{b}\quad\mathbb{a}\quad\mathbb{c}|,\quad \begin{vmatrix} {}^t\mathbb{a} \\ {}^t\mathbb{b} \\ {}^t\mathbb{c} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} {}^t\mathbb{a} \\ {}^t\mathbb{c} \\ {}^t\mathbb{b} \end{vmatrix}$

であり、特に同じ列があると 0 になります：$|\mathbb{a}\quad\mathbb{a}\quad\mathbb{c}| = 0,\quad \begin{vmatrix} {}^t\mathbb{a} \\ {}^t\mathbb{b} \\ {}^t\mathbb{b} \end{vmatrix} = 0$

(4) $|\mathbb{a}\quad\mathbb{o}\quad\mathbb{c}| = 0,\quad \begin{vmatrix} {}^t\mathbb{o} \\ {}^t\mathbb{b} \\ {}^t\mathbb{c} \end{vmatrix} = 0$

(5) $|k_1\mathbb{a}_1 + k_2\mathbb{a}_2\quad\mathbb{b}\quad\mathbb{c}| = k_1|\mathbb{a}_1\quad\mathbb{b}\quad\mathbb{c}| + k_2|\mathbb{a}_2\quad\mathbb{b}\quad\mathbb{c}|$

$$\begin{vmatrix} {}^t\mathbb{a} \\ k_1{}^t\mathbb{b}_1 + k_2{}^t\mathbb{b}_2 \\ {}^t\mathbb{c} \end{vmatrix} = k_1\begin{vmatrix} {}^t\mathbb{a} \\ {}^t\mathbb{b}_1 \\ {}^t\mathbb{c} \end{vmatrix} + k_2\begin{vmatrix} {}^t\mathbb{a} \\ {}^t\mathbb{b}_2 \\ {}^t\mathbb{c} \end{vmatrix}$$

(6) $|\mathbb{a}\quad\mathbb{b}\quad\mathbb{c}| = |\mathbb{a}+k\mathbb{b}\quad\mathbb{b}\quad\mathbb{c}|,\quad \begin{vmatrix} {}^t\mathbb{a} \\ {}^t\mathbb{b} \\ {}^t\mathbb{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^t\mathbb{a} \\ {}^t\mathbb{b} \\ {}^t\mathbb{c} + k{}^t\mathbb{b} \end{vmatrix}$

3　余因子展開

3.1　行列の余因子

行列式をヴェクター３重積を使って書いてみると、

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

であり、更に内積を計算すると

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

となっていますが、この最後の式で例えば a_{11} に掛かっている項は、元の行列式において a_{11} を通る上下左右のラインを消して得られる２次の行列式に -1 の $1+1$ 乗を掛けたものになっています（左図）。

他も同様に a_{21} に掛かっている項は元の行列式において a_{21} を通る上下左右のラインを消して得られる２次の行列式に -1 の $2+1$ 乗を掛けたものですし、a_{31} に掛かっている項も元の行列式において a_{31} を通る上下左右のラインを消して得られる２次の行列式に -1 の $3+1$ 乗を掛けたものです。

そこで、元の行列式において a_{ij} を通る上下左右のラインを消して得られる２次の行列式に -1 の $i+j$ 乗を掛けたものを行列 A の (i,j)-余因子と呼んで記号 A_{ij} で表す事にすれば、上の式は

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

とすっきりした形に書く事が出来ます。これを行列式 $|A|$ の、縦の列 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ による余因子展開と言います。また、ヴェクター３重積の性質から

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \cdot \left\{ -\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \end{aligned}$$

ともなっていて、別の縦の列 $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ に関しても全く同様に余因子展開が可能である事を示しています。

計算は省きますが、全く同様にしてもう一つの縦の列 $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ に関する余因子展開も同様に可能です：

$$|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

また、行列を転置しても行列式の値は変わらないと云う性質を使えば、これらの余因子展開は横の列に関しても同様に計算可能である事が解ります：

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= a_{31}A_{31} + a_{31}A_{32} + a_{33}A_{33}. \end{aligned}$$

あらかじめ行列式を上手く変形してある縦の列（横の列でも良いですが）に０がたくさん並ぶようにしておけば、その列で余因子展開することによって、行列式の計算を次数の１つ下がったところ（３次なら２次）に帰着させることが出来、計算が簡単になる場合があります。

また、４次以上の行列式に対しても余因子および余因子展開が同様に定義されますので、この講義では４次以上の行列式は定義しませんが、余因子展開によって次数を落とすことによって３次の行列式に帰着させることが出来ます。

3.2　逆行列の余因子表示

先ほど導入した余因子と云う概念を使って逆行列を書けば、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,{}^t\!\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

となります（逆行列の外積表示を書き直しただけ）。

4　the Vandermonde determinant

２次、３次では

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = y - x, \quad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$$

一般には

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < k \le n} (x_k - x_j)$$

の形の行列式のことを Vandermonde（ファンデルモンド）の行列式と呼んでいます。これは x_j の値がすべて互いに異なれば０ではありません。

問題 4.1　２次の多項式 $f(x)$ で、$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 5$ となるものはあるでしょうか？

これは $f(x) = ax^2 + bx + c$ と置いて連立方程式

$$\begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 2 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 5 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

を解くことによって解決されますが、この係数行列が Vandermonde 行列になっています。その行列式は $f(x)$ に代入する３つの値が全て異なる限り０にはなりませんから、逆行列が存在して解が求まる事になります（ただし $a = 0$ となる場合もありますから、２次とは限りません）。ちなみに問題の答えは $f(x) = x^2 - 2x + 2$ です。

一般に任意の n 個の異なる整数（整数でなくても構いませんよ）の組 $m_1, m_2, \ldots, m_n$ があったとき、これまた任意の n 個の整数（整数でなくても構いませんが）の組 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ に対して、

$$f(m_1) = k_1, f(m_2) = k_2, \ldots, f(m_n) = k_n$$

となるような高々 $n-1$ 次の多項式 $f(x)$ がただ１つ存在することが言えるわけです。

　また今回の例で言えば条件を満たす２次以下の関数は x^2-2x+2 しかありませんが、任意の関数 $g(x)$ に対して

$$x^2-2x+2+(x-1)(x-2)(x-3)g(x)$$

は問題の条件を満たす事になりますから、$g(x)$ として定数関数を考えれば問題の条件を満たす３次関数は無数にあることが分かりますし、もちろん更に高次のものも無数にある事になります。

5　Sylvester's determinant

　２つの多項式：

$$\begin{aligned} A(x): &\quad a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \\ B(x): &\quad b_nx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0 \end{aligned}$$

に対して

$$R_{A,B}=\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & & \\ & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & & \\ & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n \end{array}$$

で定まる行列式（書かれていない部分の成分は全て 0）を、$A(x), B(x)$ の Sylvester's determinant と言います。

　例えば $A(x)=x-a, B(x)=x-b$ である場合、Sylvester's determinant は

$$R_{A,B}=\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & -b \end{vmatrix}=a-b$$

であり、また

$$A(x)=(x-a_1)(x-a_2)=x^2-(a_1+a_2)x+a_1a_2, \quad B(x)=x-b$$

の場合は

$$\begin{aligned} R_{A,B}&=\begin{vmatrix} 1 & -(a_1+a_2) & a_1a_2 \\ 1 & -b & 0 \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} 1 & -(a_1+a_2) & a_1a_2 \\ 0 & a_1+a_2-b & -a_1a_2 \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} a_1+a_2-b & -a_1a_2 \\ 1 & -b \end{vmatrix} \\ &=a_1a_2-b(a_1+a_2-b) \\ &=(a_1-b)(a_2-b) \end{aligned}$$

です。いずれの場合も $A(x)=0$ と $B(x)=0$ の解の差の積になっていますね。

　あるいは

$$\begin{aligned} A(x)&=(x-a_1)(x-a_2)=x^2-(a_1+a_2)x+a_1a_2, \\ B(x)&=(x-b_1)(x-b_2)=x^2-(b_1+b_2)x+b_1b_2 \end{aligned}$$

の場合に計算すると（大変ですが）

$$\begin{aligned} &R_{A,B} \\ &=\begin{vmatrix} 1 & -(a_1+a_2) & a_1a_2 & 0 \\ 0 & 1 & -(a_1+a_2) & a_1a_2 \\ 1 & -(b_1+b_2) & b_1b_2 & 0 \\ 0 & 1 & -(b_1+b_2) & b_1b_2 \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} 1 & -(a_1+a_2) & a_1a_2 & 0 \\ 0 & 1 & -(a_1+a_2) & a_1a_2 \\ 0 & (a_1+a_2)-(b_1+b_2) & b_1b_2-a_1a_2 & 0 \\ 0 & 1 & -(b_1+b_2) & b_1b_2 \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} 1 & -(a_1+a_2) & a_1a_2 \\ (a_1+a_2)-(b_1+b_2) & b_1b_2-a_1a_2 & 0 \\ 1 & -(b_1+b_2) & b_1b_2 \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} 1 & -(a_1+a_2) & a_1a_2 \\ (a_1+a_2)-(b_1+b_2) & b_1b_2-a_1a_2 & 0 \\ 0 & (a_1+a_2)-(b_1+b_2) & b_1b_2-a_1a_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + a_1a_2b_1^2 + a_1a_2b_2^2 + a_1^2b_1b_2 + a_2^2b_1b_2 + 2a_1a_2b_1b_2 \\
&\quad - a_1^2a_2b_1 - a_1^2a_2b_2 - a_1a_2^2b_1 - a_1a_2^2b_2 - a_1b_1^2b_2 - a_1b_1b_2^2 - a_2b_1^2b_2 - a_2b_1b_2^2 \\
&= (a_1-b_1)(a_1-b_2)(a_2-b_1)(a_2-b_2)
\end{aligned}
$$

となって、やはり $A(x)=0$ と $B(x)=0$ の解の差の積が出てきます。

以上から、Sylvester's determinant が 0 であることは、２つの多項式が共通の根をもつことであると言えそうです（実際証明できます）。

$A(x)=ax^2+bx+c=0$ が重解をもつ条件は、$A(x)=0$ と $A'(x)=0$ が共通解をもつことですから、Sylvester's determinant をつかってその条件は

$$
0=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix} = ab^2+4a^2c-2ab^2 = a(4ac-b^2)
$$

と書くことが出来、よく知られている『判別式』に一致しています。また一般に $A(x)=(x-a_1)(x-a_2)=x^2-(a_1+a_2)x+a_1a_2$ の Sylvester's determinant は

$$
\begin{vmatrix} 1 & -(a_1+a_2) & a_1a_2 \\ 2 & -(a_1+a_2) & 0 \\ 0 & 2 & -(a_1+a_2) \end{vmatrix} = 4a_1a_2-(a_1+a_2)^2 = -(a_1-a_2)^2
$$

となっており、確かにこれが 0 であることが重解条件ですね。

Exercise

基本演習 1 次の行列式を計算して下さい

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 12 & 3 & 0 \\ -8 & 7 & 6 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 15 & 11 & 5 \\ 6 & 10 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

基本演習 2 次の行列の余因子を全て求め、更に逆行列を余因子を使って求めて下さい。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 9 \\ 4 & 13 & 11 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

基本演習 3 次の行列式を因数分解して下さい。

(1) $\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ 1 & x-4 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} s & s^2 & t+u \\ t & t^2 & u+s \\ u & u^2 & s+t \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} s & t & u \\ s^2 & t^2 & u^2 \\ tu & us & st \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} l+m+n & -n & -m \\ -n & l+m+n & -l \\ -m & -l & l+m+n \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & x^3 & x^4 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} l+m+2n & l & m \\ n & 2l+m+n & m \\ n & l & l+2m+n \end{vmatrix}$　(7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

(8) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$　(9) $\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix}$

(10) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$　(11) $\begin{vmatrix} 1-x & d & -d \\ d & 1-x & d \\ -d & d & 1-x \end{vmatrix}$

基本演習 4 ２次正方行列 A が $A^2+3A+5E=O$ を満たす時、$|A|=5$ である事を証明して下さい。

基本演習 5 ２次正方行列 A に対して、行列 $A^2+|A|E$ は A の定数倍である事を証明して下さい。

基本演習 6 A は２次の正方行列とします。２次方程式 $|A-xE|=0$ が２つの実数解（重解でも良い）λ_1,λ_2 を持つとき、$|A|=\lambda_1\lambda_2$ である事を証明して下さい。

基本演習 7 ２次以下の多項式 $f(x)$ で、$f(1)=1, f(2)=2, f(3)=7$ となるものを求めて下さい。

発展演習 8 数列 $2,4,8,16,31,\dots$ の一般項を求めて下さい。

発展演習 9 3 次方程式の判別式はどうなるでしょうか？

発展演習 10 ２つの 3 次方程式：

$$
x^3+mx^2-4=0, \qquad x^3+mx+2=0
$$

は m がどんな値であっても共通の解をもたないことを示してください。

Exercise 解答例

基本演習 1 次の行列式を計算して下さい

$$(1)\ \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 12 & 3 & 0 \\ -8 & 7 & 6 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 15 & 11 & 5 \\ 6 & 10 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad (3)\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(4)\ \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad (5)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \qquad (6)\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 12 & 3 & 0 \\ -8 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -36 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 9 \cdot 36 = 324.$

(2) $\begin{vmatrix} 15 & 11 & 5 \\ 6 & 10 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & 21 & 5 \\ 30 & 26 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -30(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 21 \\ 1 & 26 \end{vmatrix} = -30 \cdot 5 = -150.$

(3) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 14 \\ 2 & 9 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & 9 & 11 \end{vmatrix} = -1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 9 & 11 \end{vmatrix} = 71.$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 25.$

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \\ 6 & 7 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 0.$

(6) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 9.$

□

基本演習 2 次の行列の余因子を全て求め、更に逆行列を余因子を使って求めて下さい。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 9 \\ 4 & 13 & 11 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 題意の行列式を A とし、その余因子を A_{ij} とする。

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 13 & 11 \end{vmatrix} = 88 - 117 = -29$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = -(22 - 36) = 14$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = 26 - 32 = -6$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 13 & 11 \end{vmatrix} = -(33 - 26) = -7$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 8 = 3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = -(13 - 12) = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 27 - 16 = 11$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = -(9 - 4) = -5$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$$

行列式は $|A| = 1(-29) + 3 \cdot 14 + 2(-6) = 1$ なので、逆行列は次の通り：

$$A^{-1} = {}^t(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -29 & -7 & 11 \\ 14 & 3 & -5 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 題意の行列式を B とし、その余因子を B_{ij} とする。

$$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

行列式は $|B| = 1(-1) = -1$ なので、逆行列は次の通り：

$$B^{-1} = -{}^{t}(B_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

□

基本演習 3 次の行列式を因数分解して下さい。

(1) $\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ 1 & x-4 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{c}\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ 1 & x-4 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc}(1) & (2) & (3)\end{array}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ x-2 & x-4 & 1 \\ x-2 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc}(1)+(2)+(3) & (2) & (3)\end{array}\end{array}$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & x-4 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix}\begin{array}{l}(4)\\(5)\\(6)\end{array}$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix}\begin{array}{l}(4)\\(5)-(4)\\(6)-(4)\end{array}$$

$$= (x-2)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x-3 & 0 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)(x-3)^2$$

(2) $\begin{vmatrix} s & s^2 & t+u \\ t & t^2 & u+s \\ u & u^2 & s+t \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{c}\begin{vmatrix} s & s^2 & t+u \\ t & t^2 & u+s \\ u & u^2 & s+t \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc}(1) & (2) & (3)\end{array}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{vmatrix} s & s^2 & s+t+u \\ t & t^2 & s+t+u \\ u & u^2 & s+t+u \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc}(1) & (2) & (3)+(1)\end{array}\end{array}$$

$$= (s+t+u)\begin{vmatrix} s & s^2 & 1 \\ t & t^2 & 1 \\ u & u^2 & 1 \end{vmatrix}\begin{array}{l}(4)\\(5)\\(6)\end{array}$$

$$= (s+t+u)\begin{vmatrix} s & s^2 & 1 \\ t-s & t^2-s^2 & 0 \\ u-s & u^2-s^2 & 0 \end{vmatrix}\begin{array}{l}(4)\\(5)-(4)\\(6)-(4)\end{array}$$

$$= (s+t+u)(t-s)(u-s)\begin{vmatrix} s & s^2 & 1 \\ 1 & t+s & 0 \\ 1 & u+s & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (s+t+u)(t-s)(u-s)1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & t+s \\ 1 & u+s \end{vmatrix}$$

$$= (s+t+u)(s-t)(t-u)(u-s)$$

(3) $\begin{vmatrix} s & t & u \\ s^2 & t^2 & u^2 \\ tu & us & st \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{c}\begin{vmatrix} s & t & u \\ s^2 & t^2 & u^2 \\ tu & us & st \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc}(1) & (2) & (3)\end{array}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{vmatrix} s & t-s & u-s \\ s^2 & t^2-s^2 & u^2-s^2 \\ tu & us-tu & st-tu \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc}(1) & (2)-(1) & (3)-(1)\end{array}\end{array}$$

$$= (s-t)(u-s)\begin{array}{c}\begin{vmatrix} s & -1 & 1 \\ s^2 & -s-t & u+s \\ tu & u & -t \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc}(1) & (4) & (5)\end{array}\end{array}$$

$$= (s-t)(u-s)\begin{array}{c}\begin{vmatrix} s & 0 & 1 \\ s^2 & u-t & u+s \\ tu & u-t & -t \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc}(1) & (4)+(5) & (5)\end{array}\end{array}\begin{array}{l}(6)\\(7)\\(8)\end{array}$$

$$= (s-t)(u-s)\begin{vmatrix} s & 0 & 1 \\ s^2-tu & 0 & s+t+u \\ tu & u-t & -t \end{vmatrix}\begin{array}{l}(6)\\(7)-(8)\\(8)\end{array}$$

$$= (s-t)(u-s)(u-t)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} s & 1 \\ s^2-tu & s+t+u \end{vmatrix}$$

$$= (s-t)(t-u)(u-s)(st+tu+us)$$

(4) $\begin{vmatrix} l+m+n & -n & -m \\ -n & l+m+n & -l \\ -m & -l & l+m+n \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} l+m+n & -n & -m \\ -n & l+m+n & -l \\ -m & -l & l+m+n \end{vmatrix}\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix} = \begin{vmatrix} l+m & l+m & -l-m \\ -n & l+m+n & -l \\ -m-n & m+n & m+n \end{vmatrix}\begin{matrix}(1)+(2)\\(2)\\(3)+(2)\end{matrix}\\
&=(l+m)(m+n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -n & l+m+n & -l \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix}(4)\\(2)\\(5)\end{matrix}\\
&=(l+m)(m+n)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -n & l+m+n & -l \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix}(4)+(5)\\(2)\\(5)\end{matrix}\\
&=(l+m)(m+n)2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -n & -l \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\\
&=2(l+m)(m+n)(n+l)
\end{aligned}$$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & x^3 & x^4 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & x^3 & x^4 \end{vmatrix}\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 0 & x^3-x & x^4-x^2 \end{vmatrix}\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)-(2)=(4)\end{matrix}\\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & x^2-1 \\ 0 & x(x^2-1) & x^2(x^2-1) \end{vmatrix}\begin{matrix}(1)\\(2)-(1)\\(4)\end{matrix}\\
&= 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x-1 & (x-1)(x+1) \\ x(x^2-1) & x^2(x^2-1) \end{vmatrix}\\
&= (x-1)(x^2-1)\begin{vmatrix} 1 & x+1 \\ x & x^2 \end{vmatrix}\\
&= (x-1)^2(x+1)(-x)\\
&= -x(x+1)(x-1)^2
\end{aligned}$$

(6) $\begin{vmatrix} l+m+2n & l & m \\ n & 2l+m+n & m \\ n & l & l+2m+n \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} l+m+2n & l & m \\ n & 2l+m+n & m \\ n & l & l+2m+n \end{vmatrix}\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\\
&=\begin{vmatrix} l+m+n & -l-m-n & 0 \\ n & 2l+m+n & m \\ 0 & -l-m-n & l+m+n \end{vmatrix}\begin{matrix}(1)-(2)\\(2)\\(3)-(2)\end{matrix}\\
&=(l+m+n)^2\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ n & 2l+m+n & m \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}\\ \begin{matrix}(4) & (5) & (6)\end{matrix}\end{array}\\
&=(l+m+n)^2\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 2l+2m+2n & m \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\\ \begin{matrix}(4) & (5)+(4)+(6) & (6)\end{matrix}\end{array}\\
&=2(l+m+n)^3(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\\
&=2(l+m+n)^3
\end{aligned}$$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}
&\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}\\ \begin{matrix}(1) & (2) & (3)\end{matrix}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix}\\ \begin{matrix}(1) & (2)-(1) & (3)-(1)\end{matrix}\end{array}\\
&= 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix}\\
&= (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y+x & z+x \end{vmatrix}\\
&= (x-y)(y-z)(z-x)
\end{aligned}$$

(8) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \end{array}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3)+(2) \end{array}\end{array} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(9) $\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix}$

今ひとつ良いアイデアが思い浮かばないので襷掛けでやってみると、

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix} \\ =&(a+b)(b+c)(c+a) + cab + cab - ab(a+b) - ca(c+a) - cb(b+c) \\ =&(ab+ac+b^2+bc)(c+a) + 2abc - a^2b - ab^2 - ac^2 - a^2c - b^2c - bc^2 \\ =&abc + ac^2 + b^2c + bc^2 + a^2b + a^2c + ab^2 + abc + 2abc \\ &\qquad - a^2b - ab^2 - ac^2 - a^2c - b^2c - bc^2 \\ =&4abc \end{aligned}$$

が分かります。

(10) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$

行列式を変形してもあんまり上手く行かなさそうだから襷掛けで取り敢えず計算してみると

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0 - acb + bac - 0 - 0 - 0 = 0$$

となって、答えは 0 です。

(11) $\begin{vmatrix} 1-x & d & -d \\ d & 1-x & d \\ -d & d & 1-x \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} &\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1-x & d & -d \\ d & 1-x & d \\ -d & d & 1-x \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \end{array}\end{array} = \begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1-x & d & 0 \\ d & 1-x & 1-x+d \\ -d & d & 1-x+d \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3)+(2) \end{array}\end{array} \\ &= (1-x+d)\begin{vmatrix} 1-x & d & 0 \\ d & 1-x & 1 \\ -d & d & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (4) \\ (5) \\ (6) \end{array} \\ &= (1-x+d)\begin{vmatrix} 1-x & d & 0 \\ 2d & 1-x-d & 0 \\ -d & d & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (4) \\ (5)-(6) \\ (6) \end{array} \\ &= (1-x+d)1(-1)^{3+3}\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1-x & d \\ 2d & 1-x-d \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cc} (7) & (8) \end{array}\end{array} \\ &= (1-x+d)1(-1)^{3+3}\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1-x & 1-x+d \\ 2d & 1-x+d \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cc} (7) & (8)+(7) \end{array}\end{array} \begin{array}{l} (9) \\ (10) \end{array} \\ &= (1-x+d)\begin{vmatrix} 1-x & 1-x+d \\ x-1+2d & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (9) \\ (10)-(9) \end{array} \\ &= (1-x+d)^2(1-x-2d) \end{aligned}$$

□

基本演習 4　２次正方行列 A が $A^2+3A+5E=O$ を満たす時、$|A|=5$ である事を証明して下さい。

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ と置けば、ハミルトン・ケーリーの定理から

$$A^2-(a_{11}+a_{22})A+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})E=O$$

が成り立つので、この式と問題文中の式から A^2 を消去すれば

$$(3+a_{11}+a_{22})A+(5-a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21})E=O$$
$$(3+a_{11}+a_{22})A=(-5+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})E \quad \cdots(*)$$

が得られるが、ここでもし $3+a_{11}+a_{22}\neq 0$ ならば

$$A=\frac{-5+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{3+a_{11}+a_{22}}E$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\frac{-5+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{3+a_{11}+a_{22}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となって、

$$a_{12}=a_{21}=0, \qquad a_{11}=a_{22}=\frac{-5+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{3+a_{11}+a_{22}}=\frac{-5+a_{11}a_{22}}{3+a_{11}+a_{22}}$$

が得られる。そこで、$a_{11}=a_{22}=a$ と置けば、

$$a=\frac{a^2-5}{2a+3}$$
$$(2a+3)a=a^2-5$$
$$a^2+3a+5=0$$

となるのでこの２次方程式の判別式を見ると

$$3^2-4\cdot 5=-11<0$$

となっているためこの２次方程式は実数解を持たない。従ってこのケースはあり得ない事になり、（＊）においては $3+a_{11}+a_{22}=0$ である事が分かる。

　すると左辺が零行列であるならば右辺も零行列である事になり、従って $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=5$ である事が分かり、題意は示された。 □

基本演習 5　２次正方行列 A に対して、行列 $A^2+|A|E$ は A の定数倍である事を証明して下さい。

ハミルトン・ケーリーの定理から自明です。 □

基本演習 6　A は２次の正方行列とします。２次方程式 $|A-xE|=0$ が２つの実数解（重解でも良い）λ_1,λ_2 を持つとき、$|A|=\lambda_1\lambda_2$ である事を証明して下さい。

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ と置けば、問題の２次方程式は

$$|A-xE|=0$$
$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-x \end{vmatrix}=0$$
$$(a_{11}-x)(a_{22}-x)-a_{12}a_{21}=0$$
$$x^2-(a_{11}+a_{22})x+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$$

となり、解と係数の関係により $\lambda_1\lambda_2=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=|A|$ が分かる。 □

基本演習 7　２次以下の多項式 $f(x)$ で、$f(1)=1, f(2)=2, f(3)=7$ となるものを求めて下さい。

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

が題意をみたすと仮定します。すると

$$\begin{cases} a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=1 \\ a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=2 \\ a\cdot 3^2+b\cdot 3+c=7 \end{cases}$$

ですから行列を使って書けば

$$\begin{pmatrix}1^2 & 1 & 1\\ 2^2 & 2 & 1\\ 3^2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 9 & 3 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 7\end{pmatrix}$$

ですが、ここで

$$\begin{vmatrix}1^2 & 1 & 1\\ 2^2 & 2 & 1\\ 3^2 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1^2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 8 & 2 & 0\end{vmatrix}=-2$$

と余因子計算により

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 9 & 3 & 1\end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{2}{}^t\begin{pmatrix}-1 & 5 & -6\\ 2 & -8 & 6\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -5 & 8 & -3\\ 6 & -6 & 2\end{pmatrix}$$

が分かりますから

$$\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -5 & 8 & -3\\ 6 & -6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -5\\ 4\end{pmatrix}$$

を得ます。以上から求める多項式は $2x^2-5x+4$ です。 □

発展演習 8 数列 $2, 4, 8, 16, 31, \ldots$ の一般項を求めて下さい。

　色々なことが考えられるでしょう。自分で考えて自分で問題を作り自分で解答すると良いでしょう。

発展演習 9 3 次方程式の判別式はどうなるでしょうか？

例えば

$$\begin{vmatrix}a & b & c & d & 0\\ 0 & a & b & c & d\\ 3a & 2b & c & 0 & 0\\ 0 & 3a & 2b & c & 0\\ 0 & 0 & 3a & 2b & c\end{vmatrix}=a(27a^2d^2+4ac^3+4b^3d-b^2c^2-18abcd)$$

などでしょうか。 □

発展演習 10 2 つの 3 次方程式：

$$x^3+mx^2-4=0, \qquad x^3+mx+2=0$$

は m がどんな値であっても共通の解をもたないことを示してください。

$$\begin{vmatrix}1 & m & 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & m & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & m & 0 & -4\\ 1 & 0 & m & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & m & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & m & 2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & m & 0 & -4 & 0\\ 0 & 1 & m & 0 & -4\\ 0 & m & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & m & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & m & 2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}m & 0 & -4 & 0 & 0\\ 1 & m & 0 & -4 & 0\\ 0 & 1 & m & 0 & -4\\ 1 & 0 & m & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & m & 2\end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & m & 0 & -4 \\ m & 2 & 0 & 0 \\ 0 & m & 2 & 0 \\ 1 & 0 & m & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m & 0 & -4 & 0 \\ 1 & m & 0 & -4 \\ m & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} m & 0 & -4 & 0 \\ 1 & m & 0 & -4 \\ 1 & 0 & m & 2 \\ 0 & 1 & 0 & m \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} m & 0 & -4 & 0 \\ 1 & m & 0 & -4 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 1 & 0 & m & 2 \end{vmatrix} \\
&= 4 \begin{vmatrix} m & 2 & 0 \\ 0 & m & 2 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} m & 0 & -4 \\ m & 2 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} m & 0 & -4 \\ 1 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad + 4 \begin{vmatrix} m & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} + 4m \begin{vmatrix} m & 0 & -4 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} m & 0 & -4 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} m & 0 & -4 \\ 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} \\
&= 4(m^3+4) + 2(4-2m^2) + 4(2m^2+8) + 8(2-m^2) \\
&\quad + 4(16+8+4m^2) + 4m(m^3+4m) + 8(m^2+4) - 4(m^3-4) \\
&= 4m^4 + 36m^2 + 216 > 0
\end{aligned}
$$

です。

他の解法を考えてみましょう。 □