

行列式

1 2 次の行列式

定義 1.1 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して、 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ の値を A の行列式 (determinant) と言い、記号 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ で表します。

2 次方程式 $ax^2 + 2bx + c = 0$ の左辺は次のように平方完成されます：

$$ax^2 + 2bx + c = a \left(x^2 + \frac{2b}{a}x \right) + c = a \left(x + \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}$$

従って $ac - b^2$ の符号が解の様子 (実数解、複素数解など) を決定 (determine) します。これはかなり古くから知られていたことですが、ここで

$$ax^2 + 2bx + c = \begin{pmatrix} x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$$

でありここに行列式の萌芽が見られます。実際行列式 (determinant) は行列 (matrix) が導入される (19 世紀) ずっと前から (16 世紀頃?) 使われていました。

1.1 行列式の性質

事実 1.2

- (1) $|{}^tA| = |A|$, $|AB| = |A||B|$
- (2) A が正則 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ であり、 A が正則なら $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ です。
- (3) $|a \ b| = -|b \ a|$, $\begin{vmatrix} {}^ta \\ {}^tb \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} {}^tb \\ {}^ta \end{vmatrix}$, 特に $|a \ a| = 0$, $\begin{vmatrix} {}^ta \\ {}^ta \end{vmatrix} = 0$
- (4) $|a \ 0| = 0$, $\begin{vmatrix} {}^t0 \\ {}^tb \end{vmatrix} = 0$

事実 1.3 (5) $|k_1 a_1 + k_2 a_2 \ b| = k_1 |a_1 \ b| + k_2 |a_2 \ b|$,

$$\begin{vmatrix} {}^ta \\ k_1 {}^tb_1 + k_2 {}^tb_2 \end{vmatrix} = k_1 \begin{vmatrix} {}^ta \\ {}^tb_1 \end{vmatrix} + k_2 \begin{vmatrix} {}^ta \\ {}^tb_2 \end{vmatrix}$$

$$(6) |a \ b| = |a + kb \ b|, \quad \begin{vmatrix} {}^ta \\ {}^tb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^ta \\ {}^tb + k {}^ta \end{vmatrix}$$

2 3 次の行列式

定義 2.1 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して、

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

の値を A の行列式と言い、記号 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ で表します。

実際に計算してみれば分かる通り、3 本の 3 次元ベクトルを並べて出来た行列 $M = (\mathbf{l} \ \mathbf{m} \ \mathbf{n})$ に対して次が成り立ちます：

$$|M| = |\mathbf{l} \ \mathbf{m} \ \mathbf{n}| = \mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n}).$$

2.1 行列式の性質

事実 2.2

- (1) $|{}^tA| = |A|$, $|AB| = |A||B|$
- (2) 行列 A が正則 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ であり、 A が正則ならば $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ です。

事実 2.3

$$(3) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a & c \\ a & b & c \\ c & b & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b \\ a \\ c \end{vmatrix}$$

$$\text{であり、特に同じ列があると 0 になります: } \begin{vmatrix} a & a & c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a \\ b \\ b \end{vmatrix} = 0$$

$$(4) \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ b & 0 & c \\ c & 0 & c \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = 0$$

$$(5) \begin{vmatrix} k_1 a_1 + k_2 a_2 & b & c \\ a & b & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = k_1 \begin{vmatrix} a_1 & b & c \\ a & b & c \\ c & b & a \end{vmatrix} + k_2 \begin{vmatrix} a_2 & b & c \\ a & b & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k_1 a_1 + k_2 a_2 \\ b \\ c \end{vmatrix} = k_1 \begin{vmatrix} a_1 \\ b \\ c \end{vmatrix} + k_2 \begin{vmatrix} a_2 \\ b \\ c \end{vmatrix}$$

$$(6) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & k b & b & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & k b & b & c \\ a & b & b & c \\ c & b & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c + k b \end{vmatrix}$$

3 余因子展開

3.1 行列の余因子

行列式をベクトル 3 重積を使って書いてみると、

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

であり、更に内積を計算すると

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となっていますが、この最後の式で例えば a_{11} に掛かっている項は、元の行列式において a_{11} を通る上下左右のラインを消して得られる 2 次の行列式に -1 の $1+1$ 乗を掛けたものになっています (左図)。

他も同様に a_{21} に掛かっている項は元の行列式において a_{21} を通る上下左右のラインを消して得られる 2 次の行列式に -1 の $2+1$ 乗を掛けたものですし、 a_{31} に掛かっている項も元の行列式において a_{31} を通る上下左右のラインを消して得られる 2 次の行列式に -1 の $3+1$ 乗を掛けたものです。

そこで、元の行列式において a_{ij} を通る上下左右のラインを消して得られる 2 次の行列式に -1 の $i+j$ 乗を掛けたものを行列 A の (i, j) -余因子と呼んで記号 A_{ij} で表す事にすれば、上の式は

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

とすっきりした形に書く事が出来ます。これを行列式 $|A|$ の、縦の列 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ による余

因子展開と言います。また、ベクトル 3 重積の性質から

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \cdot \left\{ -\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \end{aligned}$$

ともなっていて、別の縦の列 $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ に関しても全く同様に余因子展開が可能であることを示しています。

計算は省きますが、全く同様にしてもう一つの縦の列 $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ に関する余因子展開も

同様に可能です：

$$|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

また、行列を転置しても行列式の値は変わらないと云う性質を使えば、これらの余因子展開は横の列に関しても同様に計算可能である事が解ります：

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}. \end{aligned}$$

あらかじめ行列式を上手く変形してある縦の列（横の列でも良いですが）に 0 がたくさん並ぶようにしておけば、その列で余因子展開することによって、行列式の計算を次数の 1 つ下がったところ（3 次なら 2 次）に帰着させることが出来、計算が簡単になる場合があります。

また、4 次以上の行列式に対しても余因子および余因子展開が同様に定義されますので、この講義では 4 次以上の行列式は定義しませんが、余因子展開によって次数を落とすことによって 3 次の行列式に帰着させることが出来ます。

3.2 逆行列の余因子表示

先ほど導入した余因子と云う概念を使って逆行列を書けば、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

となります（逆行列の外積表示を書き直しただけ）。

4 the Vandermonde determinant

2 次、3 次では

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = y - x, \quad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x - y)(y - z)(z - x)$$

一般には

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j)$$

の形の行列式のことを Vandermonde（ファンデルモンド）の行列式と呼んでいます。これは x_j の値がすべて互いに異なれば 0 ではありません。

問題 4.1 2 次の多項式 $f(x)$ で、 $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 5$ となるものはあるでしょうか？

これは $f(x) = ax^2 + bx + c$ と置いて連立方程式

$$\begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 2 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 5 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

を解くことによって解決されますが、この係数行列が Vandermonde 行列になっています。その行列式は $f(x)$ に代入する 3 つの値が全て異なる限り 0 にはなりませんから、逆行列が存在して解が求まる事になります（ただし $a = 0$ となる場合もありますから、2 次とは限りません）。ちなみに問題の答えは $f(x) = x^2 - 2x + 2$ です。

一般に任意の n 個の異なる整数（整数でなくても構いませんよ）の組 $m_1, m_2, \dots, m_n$ があつたとき、これまた任意の n 個の整数（整数でなくても構いませんが）の組 $k_1, k_2, \dots, k_n$ に対して、

$$f(m_1) = k_1, f(m_2) = k_2, \dots, f(m_n) = k_n$$

となるような高々 $n - 1$ 次の多項式 $f(x)$ がただ 1 つ存在すると言えます。

また今回の例で言えば条件を満たす 2 次以下の関数は $x^2 - 2x + 2$ しかありませんが、任意の関数 $g(x)$ に対して

$$x^2 - 2x + 2 + (x - 1)(x - 2)(x - 3)g(x)$$

は問題の条件を満たす事になりますから、 $g(x)$ として定数関数を考えれば問題の条件を満たす 3 次関数は無数にあることが分かりますし、もちろん更に高次のものも無数にある事になります。

5 Sylvester's determinant

2 つの多項式：

$$A(x) : a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$B(x) : b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

に対して

$$R_{A,B} = \left| \begin{array}{cccccc} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & \\ & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & & \\ & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} m \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} n$$

で定まる行列式（書かれていない部分の成分は全て 0）を、 $A(x), B(x)$ の Sylvester's determinant と言います。

例えば $A(x) = x - a, B(x) = x - b$ である場合、Sylvester's determinant は

$$R_{A,B} = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & -b \end{vmatrix} = a - b$$

であり、また

$$A(x) = (x - a_1)(x - a_2) = x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1 a_2, \quad B(x) = x - b$$

の場合は

$$\begin{aligned} R_{A,B} &= \begin{vmatrix} 1 & -(a_1 + a_2) & a_1 a_2 \\ 1 & -b & 0 \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -(a_1 + a_2) & a_1 a_2 \\ 0 & a_1 + a_2 - b & -a_1 a_2 \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 + a_2 - b & -a_1 a_2 \\ 1 & -b \end{vmatrix} \\ &= a_1 a_2 - b(a_1 + a_2 - b) \\ &= (a_1 - b)(a_2 - b) \end{aligned}$$

です。いずれの場合も $A(x) = 0$ と $B(x) = 0$ の解の差の積になっていますね。

あるいは

$$A(x) = (x - a_1)(x - a_2) = x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1 a_2,$$

$$B(x) = (x - b_1)(x - b_2) = x^2 - (b_1 + b_2)x + b_1 b_2$$

の場合に計算すると（大変ですが）

$$\begin{aligned} R_{A,B} &= \begin{vmatrix} 1 & -(a_1 + a_2) & a_1 a_2 & 0 \\ 0 & 1 & -(a_1 + a_2) & a_1 a_2 \\ 1 & -(b_1 + b_2) & b_1 b_2 & 0 \\ 0 & 1 & -(b_1 + b_2) & b_1 b_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -(a_1 + a_2) & a_1 a_2 & 0 \\ 0 & 1 & -(a_1 + a_2) & a_1 a_2 \\ 0 & (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) & b_1 b_2 - a_1 a_2 & 0 \\ 0 & 1 & -(b_1 + b_2) & b_1 b_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -(a_1 + a_2) & a_1 a_2 \\ (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) & b_1 b_2 - a_1 a_2 & 0 \\ 1 & -(b_1 + b_2) & b_1 b_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -(a_1 + a_2) & a_1 a_2 \\ (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) & b_1 b_2 - a_1 a_2 & 0 \\ 0 & (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) & b_1 b_2 - a_1 a_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1 a_2 b_1^2 + a_1 a_2 b_2^2 + a_1^2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1 b_2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 \\
&\quad - a_1^2 a_2 b_1 - a_1^2 a_2 b_2 - a_1 a_2^2 b_1 - a_1 a_2^2 b_2 - a_1 b_1^2 b_2 - a_1 b_1 b_2^2 - a_2 b_1^2 b_2 - a_2 b_1 b_2^2 \\
&= (a_1 - b_1)(a_1 - b_2)(a_2 - b_1)(a_2 - b_2)
\end{aligned}$$

となって、やはり $A(x) = 0$ と $B(x) = 0$ の解の差の積が出てきます。

以上から、Sylvester's determinant が 0 であることは、2つの多項式が共通の根をもつことであると言えます (実際証明できます)。

$A(x) = ax^2 + bx + c = 0$ が重解をもつ条件は、 $A(x) = 0$ と $A'(x) = 0$ が共通解をもつことですから、Sylvester's determinant をつかってその条件は

$$0 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix} = ab^2 + 4a^2c - 2ab^2 = a(4ac - b^2)$$

と書くことが出来、よく知られている『判別式』に一致しています。また一般に $A(x) = (x - a_1)(x - a_2) = x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1a_2$ の Sylvester's determinant は

$$\begin{vmatrix} 1 & -(a_1 + a_2) & a_1a_2 \\ 2 & -(a_1 + a_2) & 0 \\ 0 & 2 & -(a_1 + a_2) \end{vmatrix} = 4a_1a_2 - (a_1 + a_2)^2 = -(a_1 - a_2)^2$$

となっており、確かにこれが 0 であることが重解条件ですね。

Exercise

基本演習 1 次の行列式を計算して下さい

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 12 & 3 & 0 \\ -8 & 7 & 6 \end{vmatrix} & (2) \quad & \begin{vmatrix} 15 & 11 & 5 \\ 6 & 10 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} & (3) \quad & \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\
(4) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} & (5) \quad & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} & (6) \quad & \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

基本演習 2 次の行列の余因子を全て求め、更に逆行列を余因子を使って求めて下さい。

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 9 \\ 4 & 13 & 11 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基本演習 3 次の行列式を因数分解して下さい。

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ 1 & x-4 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} & (2) \quad & \begin{vmatrix} s & s^2 & t+u \\ t & t^2 & u+s \\ u & u^2 & s+t \end{vmatrix} & (3) \quad & \begin{vmatrix} s & t & u \\ s^2 & t^2 & u^2 \\ tu & us & st \end{vmatrix} \\
(4) \quad & \begin{vmatrix} l+m+n & -n & -m \\ -n & l+m+n & -l \\ -m & -l & l+m+n \end{vmatrix} & (5) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & x^3 & x^4 \end{vmatrix} \\
(6) \quad & \begin{vmatrix} l+m+2n & l & m \\ n & 2l+m+n & m \\ n & l & l+2m+n \end{vmatrix} & (7) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \\
(8) \quad & \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} & (9) \quad & \begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix} \\
(10) \quad & \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} & (11) \quad & \begin{vmatrix} 1-x & d & -d \\ d & 1-x & d \\ -d & d & 1-x \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

基本演習 4 2次正方行列 A が $A^2 + 3A + 5E = O$ を満たす時、 $|A| = 5$ である事を証明して下さい。

基本演習 5 2次正方行列 A に対して、行列 $A^2 + |A|E$ は A の定数倍である事を証明して下さい。

基本演習 6 A は 2 次の正方行列とします。2 次方程式 $|A - xE| = 0$ が 2 つの実数解 (重解でも良い) λ_1, λ_2 を持つとき、 $|A| = \lambda_1 \lambda_2$ である事を証明して下さい。

基本演習 7 2 次以下の多項式 $f(x)$ で、 $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 7$ となるものを求めて下さい。

発展演習 8 数列 $2, 4, 8, 16, 31, \dots$ の一般項を求めて下さい。

発展演習 9 3 次方程式の判別式はどうなるでしょうか?

発展演習 10 2 つの 3 次方程式:

$$x^3 + mx^2 - 4 = 0, \quad x^3 + mx + 2 = 0$$

は m がどんな値であっても共通の解をもたないことを示して下さい。