

行列の固有値と固有ベクトル

1 定義

定義 1.1 正方行列 M が与えられたとします。

あるゼロベクトルでないベクトル $\boldsymbol{p}$ と実数 l が

$$M\boldsymbol{p} = l\boldsymbol{p}$$

と云う関係式を満たしているとき、 l は行列 M の固有値 (eigenvalue)、ベクトル $\boldsymbol{p}$ は行列 M の固有値 l に関する固有ベクトル (eigenvector) であると言います。

例 1.2

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ですから、3 は $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ の固有値であり、また、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ の固有値 3 に関する固有ベクトルです。

注意 1.3 慣例としてゼロベクトルの事は固有ベクトルとは言いません。

もしも $\boldsymbol{p}$ が行列 M の (固有値 l に関する) 固有ベクトルであったならば、 $M\boldsymbol{p} = l\boldsymbol{p}$ ですから、このベクトルの (0 でない) 定数倍である様なベクトル $\boldsymbol{r} = k\boldsymbol{p}$ は、

$$M\boldsymbol{r} = M(k\boldsymbol{p}) = k(M\boldsymbol{p}) = k(l\boldsymbol{p}) = l(k\boldsymbol{p}) = l\boldsymbol{r}$$

となつてやはり M の (固有値 l に関する) 固有ベクトルである事が分かります。

従つて例えば 2 つのベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ は、どちらも行列 $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ の (固有値 3 に関する) 固有ベクトルですが、そんな事を言ったところであまり意味はなく、どちらか一方を言えばそれで十分です。もしくは、

$$k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k \text{ は } 0 \text{ 以外の任意の実数})$$

は M の (固有値 3 に関する) 固有ベクトルである、などと言います。

例 1.4

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ですから、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ の (固有値 0 に関する) 固有ベクトルです。

例 1.5

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ではあるけれども、

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

となる様なゼロでないベクトル $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ は残念ながら存在しません。なぜなら、

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

から右辺を左辺に移項して

$$\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となってしまうからです。従つて、5 は $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ の固有値ではありません。

2 固有値の求め方

2.1 背景となる計算

実数 l は行列 M の固有値だと仮定します。固有値の定義によれば、

$$M\boldsymbol{p} = l\boldsymbol{p}$$

となる様な $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ が存在しますので、さっきと同じ計算により、

$$M\boldsymbol{p} = lE\boldsymbol{p} \quad \text{あるいは} \quad (M - lE)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$$

となりますが、ここで左辺の行列 $M - lE$ が正則ならば

$$\mathbf{p} = (M - lE)^{-1} \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

となってしまう、 $\mathbf{p}$ がゼロベクトルでないと言う事と矛盾してしまいます。従ってこの行列 $M - lE$ は正則ではありません。

今度は逆に考えて $M - lE$ が正則でなかったとしましょう。すると、連立方程式：

$$(M - lE) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は（今回は3次元で考えましたが、 M が2次の正方行列なら2次元で考えればオッケーです）、 $x = 0, y = 0, z = 0$ 以外の解を持ちます。

この解を $x = p_1, y = p_2, z = p_3$ とし、 $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ と置けば $(M - lE)\mathbf{p} = \mathbf{0}$ ですか

ら、これを変形して $M\mathbf{p} = l\mathbf{p}$ が得られ、 $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ でしたからこれは l が M の固有値である事を示しています。

以上により実数 l が M の固有値である事は行列 $M - lE$ が正則でない事と同値である事が分かりますが、正則かどうかは行列式を見れば分かるわけですから、これは

事実 2.1 実数 l が行列 M の固有値である事は $|M - lE| = 0$ である事と同値です。

と言い換えられます。

従って、行列の固有値を求めるには l の方程式 $|M - lE| = 0$ の解を求めれば良い事が分かります。この方程式の事を行列 M の固有方程式 (a.k.a. 特性方程式) と言います。固有方程式は複素数解を持つ場合がありますが、これは固有値と呼ばない事にします（本当は複素行列で考えて複素固有値も考えた方がすっきりするんだけどね）。

2.2 簡単な例題

問題 2.2 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めて下さい。

題意の行列を M と書く事にします。変形すると

$$|M - lE| = \begin{vmatrix} 2-l & -1 & 2 \\ -1 & 5-l & -1 \\ 2 & -1 & 2-l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-l & -1 & 2 \\ 3-l & 5-l & -1 \\ 3-l & -1 & 2-l \end{vmatrix}$$

となり、第1行から $3-l$ を括り出せば

$$|M - lE| = (3-l) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5-l & -1 \\ 1 & -1 & 2-l \end{vmatrix} = (3-l) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6-l & -3 \\ 0 & 0 & -l \end{vmatrix} = -l(l-3)(l-6)$$

従って、固有値は $0, 3, 6$ である事が分かります。

3 固有ベクトルの計算方法

3.1 固有値が全て異なる場合

例題 3.1 次の行列の固有値 1 に対応した固有ベクトルを求めて下さい：

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる様な x, y, z を求めれば良いわけですが、固有値の性質から係数行列は正則でないで、この 3 本の連立方程式はそのうちの 2 本の連立方程式と同等です。そこで、第 1、2 式のみを連立させた方程式：

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ -2x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

で考える事にしましょう。

注意 3.2 もちろん、異なる 2 式であればどの 2 本を使っても構いません。

大事なのは、この連立方程式は一見 3 本の式が並んでいるけれども、本質的には 3 本ではないと云う事です。

しかもどう見たって 1 本ではないわけですね？だって第 1 式と第 2 式は違う式だもの（第 3 式も違う式です）。従って、1 本でも 3 本でもないわけですから、この連立方程式は実質的には 2 本の方程式から成り立っているわけです。

これは未知変数 3 つに対して 2 本の方程式しかないわけですから、3 つの未知変数全てを求める事は出来ずに解が無限個出現するわけです。

そこで z をあきらめてしまて定数と思って整理すると

$$\begin{cases} x + 3y = 2z \\ -2x - 3y = -z \end{cases} \quad \text{すなわち、} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ z \end{pmatrix}$$

なので、これを計算すると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \end{pmatrix}$$

が得られます。

注意 3.3 基本的にはどの文字をあきらめても一緒ですが、たまに、諦められない変数がある場合があります。例えば選んだ 2 本の方程式が

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

だったとしましょう。この場合、2 番目の式から $z = 0$ ですから、確定値が求まってしまい、この変数 z はあきらめたくてもあきらめられません。

まあ、これは明らかなケースですね。ではこんなのはどうでしょうか：

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

一見問題ない様に見えますが、残念ながらこの場合も z をあきらめる事は出来ません。なぜなら、やはりこの場合も簡単に $z = 0$ が分かってしまうからです。

もしも仮にここで z をあきらめてしまったとしましょう。どうなるでしょうか？ z を定数と思って変形すると

$$\begin{cases} x + y = -z \\ -2x - 2y = -3z \end{cases} \quad \text{すなわち、} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -3z \end{pmatrix}$$

となり、係数行列が正則ではありません。ここで『あ、何か変だな』と気付く事が大事です。『あ、俺ひょっとしてあきらめてはいけないものを諦めたんじゃないかな』と。

いいですか、この形に変形して係数行列が正則でなくなるのは、諦めてはいけないものを諦めてしまった場合だけです。

従って、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので、問題の行列の固有値 1 に関する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

注意 3.4 以上の計算は固有値が正しいものである事を仮定しています。従って、固有値を求める段階でミスをしていると当然ですが固有ベクトルも正しく求まりません。

しかし、一見何の問題もなく計算は終了するかに見えます。答えが出てしまうんですね。これは厄介です。自分のミスに気付けないと云う事です。

例えば何らかの計算ミスがあって、問題の行列の固有値が 0, 1, 2 だと思ってしまったとしましょう。で、何の疑いもなく固有値 0 に関する固有ベクトルを求めようと計算をし始めてしまいます。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる様な x, y, z を求めれば良いわけですね～

で、0 は固有値なんだからこの係数行列は正則ではないと、そう思っているわけです。しかし、残念ながら 0 は固有値ではありませんのでこの係数行列は正則なんです。

でも計算ミスに気付いてないから正則ではないと思ひ込んでいます。で、3 本のうちの 2 本を選んでやっても一緒なんだよな～とやってしまうわけです。

例えば第 1、2 式を選んで

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

どれか文字を 1 つ諦めるんだったな、と。じゃあ z を諦めてみましょうか、と。すると

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2z \\ -2x - 2y = -z \end{cases}$$

なんで、行列で書いて

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2z \\ -z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z \\ -z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -z \\ 2z \end{pmatrix}$$

だねと。従って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{z}{2} \\ z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となるので、問題の行列の固有値 0 に関する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ である事が分かりま

した、と、やってしまうんですね。答えが出ちゃいますからね、自分の計算について素朴に根拠のない自信を持っている人はここでミスに気付かず先へ進んでしまうんです。でも試しに検算してみると、

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \neq 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となつて、このベクトルは固有ベクトルではない事が分かります。ね、検算してみれば分かるんだけどね～

検算、必ずやって下さい。自分は計算ミスをするんだと、そう思って臨んで下さい。

□

となる x, y, z を求めれば良いわけですが、係数から見て方程式: $x + y + z = 0$ を満たす事が必要十分条件である事が分かります。

3つ変数があるのに式は1本しかないから2つの変数は諦めざるを得ません。そこで y, z は諦める事にすれば $x = -y - z$ ですから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので、結局題意の行列の固有値 1 に関する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で

ある事が分かりました。

注意 3.5 答えの書き方は、こんな風でも良いでしょう：

題意の行列の固有値 1 に関する固有ベクトルは

$$s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ただし s, t は、 s, t は共に 0 ではない様な任意の実数) です。

□

3.2 固有値に重根がある場合

問題： 次の行列の固有値は 1 (重複度 2)、0 ですが、固有値 1 に対応した固有ベクトルを求めて下さい：

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

固有値 1 に関する固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercise

基本演習 1 次の行列の固有値を求めて下さい：

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

基本演習 2 次の行列の固有値・固有ベクトルを求めて下さい：

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

基本演習 3 次の行列の固有値は 1, 2, -2 ですが、各固有値に対応した固有ベクトルを求めて下さい：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

基本演習 4 次の行列の固有値・固有ベクトルを求めて下さい：

$$\begin{pmatrix} u & v & w \\ w & u & v \\ v & w & u \end{pmatrix}.$$

基本演習 5 ベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{x}$ は行列 M の、同じ固有値 l に関する固有ベクトルであると仮定します。このとき任意の実数 a, b に対して、ベクトル $a\mathbf{p} + b\mathbf{x}$ も（この和がゼロベクトルでない限り） M の固有値 l に関する固有ベクトルであることを証明して下さい。

基本演習 6 ベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{x}$ は行列 M の、それぞれ固有値 l, m に関する固有ベクトルであるとします。このとき $l \neq m$ ならば $\mathbf{p}$ と $\mathbf{x}$ は平行ではない事を証明して下さい。

基本演習 7 行列 M, N, P は $P^{-1}MP = N$ を満たしているとします。このとき、 M と N の固有値は（存在するならば）全て一致する事を証明して下さい。

基本演習 8 2次正方行列 M は固有値 l, m をもつと仮定します。このとき $|M| = lm$ であることを証明して下さい。

基本演習 9 2次正方行列 M は固有値 l, m をもつと仮定します。このとき

$$\text{tr} M = l + m$$

であることを証明して下さい。

ただし、 M のトレース $\text{tr} M$ とは、行列 $M = (m_{ij})$ の対角成分の和 ($\text{tr} M = m_{11} + m_{22}$) であるとします。

基本演習 10 $M^3 = O$ (ゼロ行列) を満たす行列 M は固有値 0 をもつ事を証明して下さい。

発展演習 11 2次正方行列 M が

$${}^t M = M$$

を満たす（この様な行列を対称行列と言います）とき、 M は（実）固有値を必ずもつ事を証明して下さい。

発展演習 12 固有値をもたない2次正方行列の例を挙げて下さい。

発展演習 13 固有値 1, 2 をもつ2次正方行列の例を挙げて下さい。

発展演習 14 2次正方行列 U が次の3つの性質：

$$\begin{cases} {}^t U = U^{-1} & (\text{この様な行列を直交行列と言う}), |U| > 0, \\ \text{固有値 } r, s \text{ をもつ} \end{cases}$$

を満たしているとき固有値 r, s はどんな性質をもっているでしょうか。

発展演習 15 2次正方行列 A および Q は $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ を満たしていると仮定します。この時 A は固有値をもち、かつそれは a, b であることを証明して下さい。

発展演習 16 3次正方行列 B は次の性質を持っているものとします：

$$\begin{cases} {}^t B = B & (\text{このような行列を対称行列と言う}), \\ \text{固有値 } 1, 2, 3 \text{ をもつ} \end{cases}$$

このとき、 B の異なる固有値に対応する固有ベクトル同士は直交する事を証明して下さい。

Exercise 解答例

基本演習 1

(1) 題意の行列を A とすると、 A の固有方程式は

$$\begin{aligned} 0 = |A - lE| &= \begin{vmatrix} -l & 1 & 0 \\ 0 & -l & 1 \\ -4 & 4 & 1-l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -l^2 & -l & 1 \\ 4(l-1) & 4 & 1-l \end{vmatrix} \\ &= -1 \begin{vmatrix} -l^2 & 1 \\ 4(l-1) & 1-l \end{vmatrix} \\ &= (l-1) \begin{vmatrix} -l^2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (l-1)(4-l^2) \\ &= (l-1)(2-l)(2+l) \end{aligned}$$

ですから、結局 A の固有値は $1, 2, -2$ です。

(2) 題意の行列を B として B の固有方程式を計算します。

$$0 = |B - lE| = \begin{vmatrix} 2-l & 3 & -2 \\ -2 & -2-l & 1 \\ 4 & -1 & 6-l \end{vmatrix}$$

まず 2 段目をつかって変形すると

$$= \begin{vmatrix} -2-l & -1-2l & 0 \\ -2 & -2-l & 1 \\ 4-2(l-6) & -1-(2+l)(l-6) & 0 \end{vmatrix}$$

となるので、3 行目で余因子展開します。

$$= - \begin{vmatrix} -2-l & -1-2l \\ 16-2l & -l^2+4l+11 \end{vmatrix}$$

更に 1 段目の 2 倍を 2 段目に加えて計算を進めれば

$$\begin{aligned} &= - \begin{vmatrix} -2-l & -1-2l \\ 12-4l & -l^2+9 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} l+2 & 2l+1 \\ 4(3-l) & (3-l)(3+l) \end{vmatrix} \\ &= (3-l) \begin{vmatrix} l+2 & 2l+1 \\ 4 & 3+l \end{vmatrix} \\ &= (3-l) \begin{vmatrix} l-2 & l-2 \\ 4 & 3+l \end{vmatrix} \\ &= (3-l)(l-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3+l \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= (3-l)(l-2)(l-1)$$

ですから、結局 B の固有値は $1, 2, 3$ です。

(3) 題意の行列を D とすると、 D の固有方程式は

$$\begin{aligned} 0 = |D - tE| &= \begin{vmatrix} -t & -1 & -1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ -1 & -1 & -t \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-t & 0 & t-1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ -1 & -1 & -t \end{vmatrix} \\ &= (t-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ -1 & -1 & -t \end{vmatrix} \\ &= (t-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2-t & 1 \\ -1-t & -1 & -t \end{vmatrix} \\ &= (t-1) \begin{vmatrix} 2 & 2-t \\ -1-t & -1 \end{vmatrix} \\ &= (t-1) \begin{vmatrix} 2 & 2-t \\ 1-t & 1-t \end{vmatrix} \\ &= -(t-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 2-t \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -t(t-1)^2 \end{aligned}$$

ですから、結局 D の固有値は $1, 0$ です。

□

基本演習 2

(1) 題意の行列を C とすると、 C の固有方程式は

$$\begin{aligned} 0 = |C - xE| &= \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 1 \\ 6 & -1-x & 0 \\ 6 & -2 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -1-x \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + (1-x) \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ 6 & -1-x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1-x \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + (1-x)\{(2-x)(-1-x) + 6\} \\ &= (1-x)\{-6 + (2-x)(-1-x) + 6\} \\ &= (1-x)(2-x)(-1-x) \end{aligned}$$

ですから、結局 C の固有値は $1, 2, -1$ です。

固有値 1 について :要するに

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となる様なベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求めれば良いが、この式は変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるのでこの連立方程式を解けば良いことが分かります。

見てすぐに分かる様に第 3 式は第 2 式と同じ式であり、従って 3 未知数で式が 2 本しかないから解が確定せずに無限個存在する場合があります。

連立方程式は

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

ですが、ここで x を諦める事にすれば、まず第 2 式から $y = 3x$ であり、これを第 1 式に代入すれば $z = y - x = 2x$ である事が分かり、従って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となって、求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ です。

固有値 2 について :要するに

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となる様なベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求めれば良いわけですが、この式は変形すると

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるのでこの連立方程式を解けば良いでしょう。

2 は固有値だったのでこの左辺の係数行列は非正則であり、一見 3 本ある様に見える方程式は実質 2 本しかない事になります (実質 1 本でない事は明らか)。従って 3 未知数で式が 2 本しかないから解が確定せずに無限個存在する場合があります。

連立方程式のうち第 1、2 式を採用すれば

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

であるが、ここで y を諦める事にすれば、 $z = y, x = \frac{1}{2}y$ である事が分かり、従って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y \\ y \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となって、求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ です。

固有値 -1 について :要するに

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となる様なベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求めれば良いのですが、この式は変形すると

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるのでこの連立方程式を解けば良いことが分かります。

見て分かる様に第 1、3 式は同じ式であり、従って 3 未知数で方程式は 2 本しかないので解が確定せずに無限個存在する場合があります。

連立方程式は

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

ですが、まず $x = 0$ であり、更に y を諦める事にすれば、 $z = y$ である事が分かり、従って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって、求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

(2) 問題の行列を F とすると、 F の固有方程式は

$$0 = |F - mE| = \begin{vmatrix} -m & -1 \\ 3 & 2 - m \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} -m & -1 \\ 3 & 2-m \end{vmatrix} \\
 &= m^2 - 2m + 3 \\
 &= (m-1)^2 + 2 > 0
 \end{aligned}$$

となり、これは実数の範囲では解をもちません。従って F は固有値・固有ベクトルをもちません。

(3) 問題の行列の固有方程式は

$$0 = \begin{vmatrix} -1-p & 8 \\ -2 & 7-p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1+p \\ 7-p & 2 \end{vmatrix} = p^2 - 6p + 9 = (p-3)^2$$

となるのでこの固有方程式の実数解、すなわち固有値は 3 です。

固有値 3 に関する固有ベクトルとは、

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となるベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ でしたが、この式を変形すると

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となりますから、要するに方程式：

$$x - 2y = 0$$

を満たす x, y を求めれば良い事が分かります。

x を y で表現すると $x = 2y$ なので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって、結局求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である事が分かります。

□

基本演習 3

固有値 1 について：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となる様なベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求めれば良いが、これは

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるからこの連立方程式の解を求めれば良い。ところが第 1 式と第 3 式は同じ式であるので、この連立方程式は本質的には

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

である。

どうせ 3 つの変数全てを確定値として求める事は出来ないので、仮に y は諦めるとすると、

$$x = y, \quad z = y$$

であるから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が分かり、結局、求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

固有値 2 について：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となる様なベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求めれば良いが、これは

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるからこの連立方程式の解を求めれば良い。

どうせ 3 つの変数を全て確定させる事は出来ないのだから（係数行列が非正則だから）、この際 y は諦める事にすれば、第 1、2 式から

$$y = 2x, \quad z = 2y$$

が分かり、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

が分かるので、求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ である。

固有値 -2 について：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となる様なベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求めれば良いが、これは

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるからこの連立方程式の解を求めれば良い。

どうせ3つの変数を全て確定させる事は出来ないのだから（係数行列が非正則だから）、この際 y は諦める事にすれば、第1、2式から

$$y = -2x, \quad z = -2y$$

が分かり、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

が分かるので、求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ である。

□

基本演習 4

固有方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= |M - xE| \\ &= \begin{vmatrix} u-x & v & w \\ w & u-x & v \\ v & w & u-x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u+v+w-x & v & w \\ u+v+w-x & u-x & v \\ u+v+w-x & w & u-x \end{vmatrix} \\ &= (u+v+w-x) \begin{vmatrix} 1 & v & w \\ 1 & u-x & v \\ 1 & w & u-x \end{vmatrix} \\ &= (u+v+w-x) \begin{vmatrix} 1 & v & w \\ 0 & u-v-x & v-w \\ 0 & w-v & u-w-x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= (u+v+w-x) \begin{vmatrix} u-v-x & v-w \\ w-v & u-w-x \end{vmatrix}$$

ですが、ここで

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u-v-x & v-w \\ w-v & u-w-x \end{vmatrix} &= (x-u+v)(x-u+w) + (v-w)^2 \\ &= (x-u)^2 + (v+w)(x-u) + vw + (v-w)^2 \\ &= \left(x-u + \frac{v+w}{2}\right)^2 - \frac{(v+w)^2}{4} + vw + (v-w)^2 \\ &= \left(x-u + \frac{v+w}{2}\right)^2 - \frac{(v-w)^2}{4} + (v-w)^2 \\ &= \left(x-u + \frac{v+w}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(v-w)^2 \end{aligned}$$

なので、 $v \neq w$ のときは固有値は $u+v+w$ のみであり、 $v = w \neq 0$ のときは固有値は $u+v+w = u+2v$ と $u-v$ （後者重根）、 $v = w = 0$ のときは u のみ（3重根）です。

【 $v \neq w$ のとき】固有値は $u+v+w$ のみであり、対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -v-w & v & w \\ w & -v-w & v \\ v & w & -v-w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の（ゼロベクトルでない）解です。しかし第1・2式を辺々加えて -1 倍すれば第3式が得られるので、第1・2式のみで考えればよく、 z を諦めれば

$$\begin{cases} -(v+w)x + vy = -wz \\ wx - (v+w)y = -vz \end{cases}$$

ですから、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -(v+w) & v \\ w & -(v+w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= -z \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= -\frac{z}{(v+w)^2 - vw} \begin{pmatrix} -(v+w) & -v \\ -w & -(v+w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{z}{(v+w)^2 - vw} \begin{pmatrix} v^2 + vw + w^2 \\ v^2 + vw + w^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られ、対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

【 $v = w \neq 0$ のとき】固有値 $u+2v$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -2v & v & v \\ v & -2v & v \\ v & v & -2v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の（ゼロベクトルでない）解です。しかし第 1・2 式を辺々加えて -1 倍すれば第 3 式が得られるので、第 1・2 式のみで考えればよく、 z を諦めれば

$$\begin{cases} -2vx + vy = -vz \\ vx - 2vy = -vz \end{cases}$$

ですから、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= -z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= -\frac{z}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られ、対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

また、固有値 $u - v$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} v & v & v \\ v & v & v \\ v & v & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の（ゼロベクトルでない）解です。しかしこれらは全て同じ式なので y, z を諦めれば

$$x = -y - z$$

ですから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり、対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

【 $v = w = 0$ のとき】このとき $M = uE$ ですから、固有値は u のみであって固有ベクトルはゼロでない任意のベクトルです。□

基本演習 5

$$M(ap + bx) = aMp + bMx = alp + blx = l(ap + bx)$$

に因り明らか。□

発展演習 6

$\mathbb{P}, x$ は平行であると仮定します。すると $x = k\mathbb{P}$ と書けますので問題 1 の答えから x は M の l に関する固有値である事が分かります。

しかし、 x はもともと M の m に関する固有ベクトルでしたから結局 $l = m$ が分かります。これで

$$\mathbb{P} \text{ と } x \text{ が平行} \quad \Rightarrow \quad l = m$$

が分かりましたので、この対偶をとれば題意が証明されます。□

発展演習 7

$$N - lE = P^{-1}MP - lE = P^{-1}MP - P^{-1}(lE)P = P^{-1}(M - lE)P$$

なので、両辺の行列式をとれば

$$|N - lE| = |P^{-1}(M - lE)P| = |P|^{-1}|M - lE||P| = |M - lE|$$

である事が分かります。

従って、 M と N の固有方程式は一致し、更にその実数解である固有値も存在する限りは一致します。

別証明： N が固有値 a をもつと仮定します。このとき $N\mathbf{v} = a\mathbf{v}$ となる様なゼロでないベクトル $\mathbf{v}$ が存在します。

しかし $P^{-1}MP = N$ なので、

$$N\mathbf{v} = a\mathbf{v}$$

$$P^{-1}MP\mathbf{v} = a\mathbf{v}$$

ですが、この両辺に左から P を掛ければ

$$MP\mathbf{v} = P(a\mathbf{v})$$

$$M(P\mathbf{v}) = a(P\mathbf{v})$$

となっています。

P は正則な行列なので $\mathbf{v}$ がゼロでなければ $P\mathbf{v}$ もゼロではなく、従ってこの式はベクトル $P\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が、行列 M の、固有値 a に関する固有ベクトルである事を示していて、従って a は M の固有値です。

以上により、 N の固有値は M の固有値でもある事が分かります。

与えられた条件式 $P^{-1}MP = N$ は、変形すると

$$PNP^{-1} = M$$

とも書けるので、今と全く同様な議論（ P と P^{-1} が入れ替わりますが）により、逆に M の固有値が N の固有値である事も分かります。

従って、 M と N の固有値は、存在する限りは全て一致します。□

発展演習 8

$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ とおく。 M の固有値は固有方程式：

$$|M - xE| = 0$$

の実数解であるが、

$$\begin{aligned} |M - xE| &= \begin{vmatrix} m_{11} - x & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - x \end{vmatrix} = (m_{11} - x)(m_{22} - x) - m_{12}m_{21} \\ &= x^2 - (m_{11} + m_{22})x + m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} \end{aligned}$$

である事と、解と係数の関係から

$$lm = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = |M|$$

が得られる。

$l \neq m$ の時の別証明

M の、固有値 l, m に関する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbb{p}, \mathbb{x}$ とします。
この時、

$$M\mathbb{p} = l\mathbb{p}, \quad M\mathbb{x} = m\mathbb{x}$$

なので、これらをまとめて書けば

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} \mathbb{p} & \mathbb{x} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} l\mathbb{p} & m\mathbb{x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{p} & \mathbb{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{p} & \mathbb{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{p} & \mathbb{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、ここで両辺の行列式をとれば、

$$|M| |\mathbb{p} \quad \mathbb{x}| = |\mathbb{p} \quad \mathbb{x}| \begin{vmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix}$$

であるが、 l, m が異なる時 $\mathbb{p}, \mathbb{x}$ は平行ではないため、行列 $\begin{pmatrix} \mathbb{p} & \mathbb{x} \end{pmatrix}$ は正則であり、その行列式は 0 ではない。そこで両辺をその行列式で割ってやれば

$$|M| = \begin{vmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} = lm$$

が得られる。

□

発展演習 9

$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ とおく。 M の固有値は固有方程式：

$$|M - xE| = 0$$

の実数解であるが、

$$\begin{aligned} |M - xE| &= \begin{vmatrix} m_{11} - x & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - x \end{vmatrix} = (m_{11} - x)(m_{22} - x) - m_{12}m_{21} \\ &= x^2 - (m_{11} + m_{22})x + m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} \end{aligned}$$

である事と、解と係数の関係から

$$l + m = m_{11} + m_{22}$$

が得られる。

□

発展演習 10

$M^3 = O$ によれば、 $|M|^3 = 0$ すなわち、 $|M| = 0$ であるが、 M の固有方程式が $|M - lE| = 0$ である事から、これは $l = 0$ が固有方程式の 1 つの解である事を示している。従って M は固有値 0 をもつ。

□

発展演習 11

M の成分を $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ とします。このとき M の固有方程式は、

$$0 = |M - lE| = \begin{vmatrix} a-l & b \\ b & c-l \end{vmatrix} = l^2 - (a+c)l + ac - b^2$$

となりますが、これは

$$\begin{aligned} l^2 - (a+c)l + ac - b^2 &= \left(l - \frac{a+c}{2}\right)^2 - \frac{(a+c)^2}{4} + ac - b^2 \\ &= \left(l - \frac{a+c}{2}\right)^2 - \frac{(a-c)^2}{4} - b^2 \end{aligned}$$

と変形出来るため、この方程式の解は実数である事が分かる。

よって、 M は固有値を必ずもちます。

□

発展演習 12

行列 M の成分を $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると、その固有方程式は

$$0 = |M - lE| = \begin{vmatrix} a-l & b \\ c & d-l \end{vmatrix} = l^2 - (a+d)l + ad - bc$$

となる。この方程式の判別式は

$$(a+d)^2 - 4(ad - bc)$$

である。これが負になる様な場合を考えてみる。

例えば $a = d = 0$ ならば判別式は $4bc$ だから、 b, c の一方が正で一方が負なら判別式は負となる。

だからたとえば、 $a = d = 0, b = -1, c = 1$ の場合には固有方程式は虚数解をもつ事になり固有値はない。

固有値をもたない行列の例：

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

発展演習 13

色々考えられますが、一番簡単なのは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

でしょうか。

□

発展演習 14

条件 ${}^tU = U^{-1}$ によれば U は正則行列であり、かつ、両辺の行列式をとれば

$$|U| = |{}^tU| = |U^{-1}| = |U|^{-1}$$

すなわち、 $|U|^2 = 1$ である事が分かりますが、更に 2 番目の条件によれば $|U| = 1$ となります。そこで固有値を考えると、固有値の積が行列式になるわけでしたから、

$$rs = |U| = 1$$

となって、 r, s はともに 0 でなく、かつ互いに逆数である事が分かります。

□

発展演習 15

固有方程式を計算すれば直ちに分かります：

$$\begin{aligned} |A - xE| &= \left| Q \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} Q^{-1} - xE \right| \\ &= \left| Q \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} Q^{-1} - Q(xE)Q^{-1} \right| \\ &= \left| Q \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} - xE \right\} Q^{-1} \right| \\ &= |Q| \begin{vmatrix} a-x & 0 \\ 0 & b-x \end{vmatrix} |Q^{-1}| \\ &= (a-x)(b-x) \end{aligned}$$

□

発展演習 16

固有値 $1, 2$ に対応した固有ベクトルを $\mathbf{w}, \mathbf{w}$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} &= (B\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} \\ &= {}^t(B\mathbf{w})\mathbf{w} \\ &= {}^t\mathbf{w} {}^tB\mathbf{w} \\ &= {}^t\mathbf{w}B\mathbf{w} \\ &= {}^t\mathbf{w}(2\mathbf{w}) \\ &= 2 {}^t\mathbf{w}\mathbf{w} \\ &= 2\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \\ 0 &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$

となるのでこの 2 本の固有ベクトルは直交している。他も同様。

□