行列の固有値と固有ヴェクター

1　定義

定義 1.1 正方行列 M が与えられたとします。
　あるゼロヴェクターでないヴェクター $\mathbb{p}$ と実数 l が

$$M\mathbb{p} = l\mathbb{p}$$

と云う関係式を満たしているとき、l は行列 M の固有値（eigenvalue）、ヴェクター $\mathbb{p}$ は行列 M の固有値 l に関する固有ヴェクター（eigenvector）であると言います。

例 1.2

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ですから、3 は $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ の固有値であり、また、$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ の固有値 3 に関する固有ヴェクターです。

注意 1.3 慣例としてゼロヴェクターの事は固有ヴェクターとは言いません。

　もしも $\mathbb{p}$ が行列 M の（固有値 l に関する）固有ヴェクターであったならば、$M\mathbb{p} = l\mathbb{p}$ ですから、このヴェクターの（0 でない）定数倍である様なヴェクター $\mathbb{r} = k\mathbb{p}$ は、

$$M\mathbb{r} = M(k\mathbb{p}) = k(M\mathbb{p}) = k(l\mathbb{p}) = l(k\mathbb{p}) = l\mathbb{r}$$

となってやはり M の（固有値 l に関する）固有ヴェクターである事が分かります。
　従って例えば２つのヴェクター $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ は、どちらも行列 $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ の（固有値 3 に関する）固有ヴェクターですが、そんな事を言ったところであまり意味はなく、どちらか一方を言えばそれで十分です。もしくは、

$$k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (k \text{ は } 0 \text{ 以外の任意の実数})$$

は M の（固有値 3 に関する）固有ヴェクターである、などと言います。

例 1.4

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ですから、$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ の（固有値 0 に関する）固有ヴェクターです。

例 1.5

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ではあるけれども、

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

となる様なゼロでないヴェクター $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ は残念ながら存在しません。なぜなら、

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

から右辺を左辺に移項して

$$\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となってしまうからです。従って、5 は $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ の固有値ではありません。

2　固有値の求め方

2.1　背景となる計算

　実数 l は行列 M の固有値だと仮定します。固有値の定義によれば、

$$M\mathbb{p} = l\mathbb{p}$$

となる様な $\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ が存在しますので、さっきと同じ計算により、

$$M\mathbb{p} = lE\mathbb{p} \quad \text{あるいは} \quad (M - lE)\mathbb{p} = \mathbb{o}$$

となりますが、ここで左辺の行列 $M - lE$ が正則ならば

$$\mathbb{p} = (M - lE)^{-1}\mathbb{o} = \mathbb{o}$$

となってしまい、$\mathbb{p}$ がゼロヴェクターでないと云う事と矛盾してしまいます。従ってこの行列 $M - lE$ は正則ではありません。

今度は逆に考えて $M - lE$ が正則でなかったとしましょう。すると、連立方程式：

$$(M - lE)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は（今回は３次元で考えましたが、M が２次の正方行列なら２次元で考えればオッケーです)、$x = 0, y = 0, z = 0$ 以外の解を持ちます。

この解を $x = p_1, y = p_2, z = p_3$ とし、$\mathbb{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ と置けば $(M - lE)\mathbb{p} = \mathbb{o}$ ですから、これを変形して $M\mathbb{p} = l\mathbb{p}$ が得られ、$\mathbb{p} \neq \mathbb{o}$ でしたからこれは l が M の固有値である事を示しています。

以上により実数 l が M の固有値である事は行列 $M - lE$ が正則でない事と同値である事が分かりますが、正則かどうかは行列式を見れば分かるわけですから、これは

事実 2.1 実数 l が行列 M の固有値である事は $|M - lE| = 0$ である事と同値です。

と言い換えられます。

従って、行列の固有値を求めるには l の方程式 $|M - lE| = 0$ の解を求めれば良い事が分かります。この方程式の事を行列 M の固有方程式（a.k.a. 特性方程式）と言います。固有方程式は複素数解を持つ場合がありますが、これは固有値と呼ばない事にします（本当は複素行列で考えて複素固有値も考えた方がすっきりするんだけどね)。

2.2 簡単な例題

問題 2.2 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めて下さい。

題意の行列を M と書く事にします。変形すると

$$|M - lE| = \begin{vmatrix} 2-l & -1 & 2 \\ -1 & 5-l & -1 \\ 2 & -1 & 2-l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-l & -1 & 2 \\ 3-l & 5-l & -1 \\ 3-l & -1 & 2-l \end{vmatrix}$$

となり、第１行から $3 - l$ を括り出せば

$$|M - lE| = (3-l)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5-l & -1 \\ 1 & -1 & 2-l \end{vmatrix} = (3-l)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6-l & -3 \\ 0 & 0 & -l \end{vmatrix} = -l(l-3)(l-6)$$

従って、固有値は $0, 3, 6$ である事が分かります。

3 固有ヴェクターの計算方法

3.1 固有値が全て異なる場合

例題 3.1 次の行列の固有値 1 に対応した固有ヴェクターを求めて下さい：

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる様な x, y, z を求めれば良いわけですが、固有値の性質から係数行列は正則でないので、この３本の連立方程式はそのうちの２本の連立方程式と同等です。そこで、第１、２式のみを連立させた方程式：

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ -2x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

で考える事にしましょう。

> **注意 3.2** もちろん、異なる２式であればどの２本を使っても構いません。
> 　大事なのは、この連立方程式は一見３本の式が並んでいるけれども、本質的には３本ではないと云う事です。
> 　しかもどう見たって１本ではないわけですよね？だって第１式と第２式は違う式だもの（第３式も違う式です）。従って、１本でも３本でもないわけですから、この連立方程式は実質的には２本の方程式から成り立っているわけです。

　これは未知変数３つに対して２本の方程式しかないわけですから、３つの未知変数全てを求める事は出来ずに解が無限個出現するわけです。

　そこで z をあきらめてしまって定数と思って整理すると

$$\begin{cases} x + 3y = 2z \\ -2x - 3y = -z \end{cases} \qquad \text{すなわち、} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ z \end{pmatrix}$$

なので、これを計算すると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \end{pmatrix}$$

が得られます。

> **注意 3.3** 基本的にはどの文字をあきらめても一緒ですが、たまに、諦められない変数がある場合があります。例えば選んだ２本の方程式が
>
> $$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
>
> だったとしましょう。この場合、２番目の式から $z = 0$ ですから、確定値が求まってしまい、この変数 z はあきらめたくてもあきらめられません。
> 　まあ、これは明らかなケースですね。ではこんなのはどうでしょうか：
>
> $$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$
>
> 一見問題ない様に見えますが、残念ながらこの場合も z をあきらめる事は出来ません。なぜなら、やはりこの場合も簡単に $z = 0$ が分かってしまうからです。
> 　もしも仮にここで z をあきらめてしまったとしましょう。どうなるでしょうか？　z を定数と思って変形すると
>
> $$\begin{cases} x + y = -z \\ -2x - 2y = -3z \end{cases} \qquad \text{すなわち、} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -3z \end{pmatrix}$$
>
> となり、係数行列が正則ではありません。ここで『あ、何か変だな』と気付く事が大事です。『あ、俺ひょっとしてあきらめてはいけないものを諦めたんじゃないかな』と。
> 　いいですか、この形に変形して係数行列が正則でなくなるのは、諦めてはいけないものを諦めてしまった場合だけです。

従って、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,/\!/\, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので、問題の行列の固有値 1 に関する固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

> **注意 3.4** 以上の計算は固有値が正しいものである事を仮定しています。従って、固有値を求める段階でミスをしていると当然ですが固有ヴェクターも正しく求まりません。
> 　しかし、一見何の問題もなく計算は終了するかに見えます。答えが出てしまうんですね。これは厄介です。自分のミスに気付けないと云う事です。
>
> 　例えば何らかの計算ミスがあって、問題の行列の固有値が $0, 1, 2$ だと思ってしまったとしましょう。で、何の疑いもなく固有値 0 に関する固有ヴェクターを求めようと計算をし始めてしまいます。
>
> $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
>
> となる様な x, y, z を求めれば良いわけですね〜
> 　で、0 は固有値なんだからこの係数行列は正則ではないと、そう思っているわけです。しかし、残念ながら 0 は固有値ではありませんのでこの係数行列は正則なんです。
> 　でも計算ミスに気付いてないから正則ではないと思い込んでいます。で、３本のうちどの２本を選んでやっても一緒なんだよな〜とやってしまうわけです。
> 　例えば第１、２式を選んで
>
> $$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + z = 0 \end{cases}$$
>
> どれか文字を１つ諦めるんだったな、と。じゃあ z を諦めてみましょうか、と。すると
>
> $$\begin{cases} 2x + 3y = 2z \\ -2x - 2y = -z \end{cases}$$

なんで、行列で書いて

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2z \\ -z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2z \\ -z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -z \\ 2z \end{pmatrix}$$

だねと。従って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{z}{2} \\ z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となるので、問題の行列の固有値 0 に関する固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ である事が分かりました、と、やってしまうんですね。答えが出ちゃいますからね、自分の計算について素朴に根拠のない自信を持っている人はここでミスに気付かずに先へ進んでしまうんです。でも試しに検算してみると、

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \neq 0\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となって、このヴェクターは固有ヴェクターではない事が分かります。ね、検算してみれば分かるんだけどね〜

検算、必ずやって下さい。自分は計算ミスをするんだと、そう思って臨んで下さい。

□

3.2 固有値に重根がある場合

> **問題：** 次の行列の固有値は 1（重複度２）、0 ですが、固有値 1 に対応した固有ヴェクターを求めて下さい：
>
> $$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

固有値 1 に関する固有ヴェクターは、

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる x, y, z を求めれば良いわけですが、係数から見て方程式：$x + y + z = 0$ を満たす事が必要十分条件である事が分かります。

３つ変数があるのに式は１本しかないから２つの変数は諦めざるを得ません。そこで y, z は諦める事にすれば $x = -y - z$ ですから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので、結局題意の行列の固有値 1 に関する固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である事が分かりました。

注意 3.5 答えの書き方は、こんな風でも良いでしょう：
題意の行列の固有値 1 に関する固有ヴェクターは

$$s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（ただし s, t は、s, t は共に 0 ではない様な任意の実数）です。

□

Exercise

基本演習 1 次の行列の固有値を求めて下さい：

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

基本演習 2 次の行列の固有値・固有ヴェクターを求めて下さい：

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

基本演習 3 次の行列の固有値は $1,\ 2,\ -2$ ですが、各固有値に対応した固有ヴェクターを求めて下さい：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

基本演習 4 次の行列の固有値・固有ヴェクターを求めて下さい：

$$\begin{pmatrix} u & v & w \\ w & u & v \\ v & w & u \end{pmatrix}.$$

基本演習 5 ヴェクター $\mathbb{p}, \mathbb{r}$ は行列 M の、同じ固有値 l に関する固有ヴェクターであると仮定します。このとき任意の実数 a, b に対して、ヴェクター $a\mathbb{p} + b\mathbb{r}$ も（この和がゼロヴェクターでない限り）M の固有値 l に関する固有ヴェクターである事を証明して下さい。

基本演習 6 ヴェクター $\mathbb{p},\ \mathbb{r}$ は行列 M の、それぞれ固有値 $l,\ m$ に関する固有ヴェクターであるとします。このとき $l \neq m$ ならば $\mathbb{p}$ と $\mathbb{r}$ は平行ではない事を証明して下さい。

基本演習 7 行列 $M,\ N,\ P$ は $P^{-1}MP = N$ を満たしているとします。このとき、M と N の固有値は（存在するならば）全て一致する事を証明して下さい。

基本演習 8 2次正方行列 M は固有値 $l,\ m$ をもつと仮定します。このとき $|M| = lm$ である事を証明して下さい。

基本演習 9 2次正方行列 M は固有値 $l,\ m$ をもつと仮定します。このとき

$$\mathrm{tr}M = l + m$$

である事を証明して下さい。

ただし、M のトレース $\mathrm{tr}M$ とは、行列 $M = (m_{ij})$ の対角成分の和（$\mathrm{tr}M = m_{11} + m_{22}$）であるとします。

基本演習 10 $M^3 = O$（ゼロ行列）を満たす行列 M は固有値 0 をもつ事を証明して下さい。

発展演習 11 2次正方行列 M が

$${}^tM = M$$

を満たす（この様な行列を対称行列と言います）とき、M は（実）固有値を必ずもつ事を証明して下さい。

発展演習 12 固有値をもたない2次正方行列の例を挙げて下さい。

発展演習 13 固有値 $1,\ 2$ をもつ2次正方行列の例を挙げて下さい。

発展演習 14 2次正方行列 U が次の3つの性質：

$$\begin{cases} {}^tU = U^{-1} \quad \text{（この様な行列を直交行列と言う）}, \ |U| > 0, \\ \text{固有値 } r,\ s \text{ をもつ} \end{cases}$$

を満たしているとき固有値 $r,\ s$ はどんな性質をもっているでしょうか。

発展演習 15 2次正方行列 A および Q は $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ を満たしていると仮定します。この時 A は固有値をもち、かつそれは $a,\ b$ である事を証明して下さい。

発展演習 16 3次正方行列 B は次の性質を持っているものとします：

$$\begin{cases} {}^tB = B \quad \text{（このような行列を対称行列と言う）}, \\ \text{固有値 } 1, 2, 3 \text{ をもつ} \end{cases}$$

このとき、B の異なる固有値に対応する固有ヴェクター同士は直交する事を証明して下さい。