連立漸化式と固有値

1　連立２項間漸化式

1.1　固有ヴェクターを使う方法

例題 1.1 次の様な連立線形漸化式：

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - b_n \\ b_{n+1} = 6a_n - 2b_n \end{cases}, \quad a_0 = 1,\, b_0 = 2$$

を満たす数列 $\{a_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$, $\{b_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ を求めて下さい。

【解答例】このタイプの漸化式は行列を使って

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

と書く事が出来ます。具体的な計算は省略しますが、係数行列の固有値は $-1, 4$ で、対応した固有ヴェクターはそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ になっております。

ここでもしも $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ がこの係数行列の固有ヴェクターだったら、式 (1.1) の示す“行列倍”と云うのはただの定数倍になってしまいますよね。

例えば初項が（実際は違いますが）仮に $a_0 = 1, b_0 = 1$ だったならば、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \left\{ 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = 4^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
&\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \left\{ 4^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = 4^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となってしまい、漸化式は簡単に解けてしまいます。

もちろん現実の問題では初項は $a_0 = 1, b_0 = 2$ ですからこう上手く行くわけではありませんが、『初項が固有ヴェクターだったら簡単なのに』と云う事、これは大きなヒントになりますね。

いいですか、初項が固有ヴェクターだったら良いんですよね？　だったら与えられた初項を強引に固有ヴェクターで書いてしまおうと、そう云うわけですよ。要するに

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書けるのならば、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \left\{ p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = -p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 4r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \left\{ -p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 4r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = (-1)^2 p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 4^2 r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
&\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \left\{ (-1)^{n-1} p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 4^{n-1} r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = (-1)^n p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 4^n r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となりますから、漸化式は簡単に解けてしまいますよね。

後は p, r の具体的な値を求めてやればオッケーです。しかしそれも、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \left\{ p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
&= p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

から、

$$\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

と求まってしまいますので、結局、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = (-1)^n p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 4^n r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^n}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{4 \cdot 4^n}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} (-1)^n + 4 \cdot 4^n \\ 6(-1)^n + 4 \cdot 4^n \end{pmatrix}$$

が求める一般項です。 □

1.2　固有ヴェクターが足りない場合

例題 1.2 次の漸化式を満たす数列 $\{c_n\},\{d_n\}$ の一般項を求めて下さい。

$$\begin{cases} c_{n+1}=-c_n+8d_n \\ d_{n+1}=-2c_n+7d_n \end{cases},\quad c_0=1,\, d_0=1.$$

【解答例】このタイプの漸化式は行列を使って

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

と書く事が出来ますが、まず係数行列（これを B とします）の固有値と固有ヴェクターを求めておきましょう。

まず固有値ですが、固有方程式の係数を考えれば、解と係数の関係によって、２つの固有値を足して 6、掛けて 9 になるわけですからそれは 3（重根）です。

次に固有ヴェクターですが、固有値 3 に対応した固有ヴェクターとは、すなわち $(B-3E)\mathbb{x}=$ となる様なヴェクターでしたから、$\mathbb{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とした上で成分で書いた連立方程式：

$$\begin{cases} -4x+8y=0 \\ -2x+4y=0 \end{cases}$$

を解けば良いのですが、この２式は同じ式であって、$x=2y$ ですから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}//\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって固有値 3 に対応した固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のみです。

固有ヴェクターが１次元分しかありませんので前節の様なやり方は適用出来ません。そこで次の様に『固有ヴェクターではないが固有ヴェクターらしきもの』を見つけ出して使う事になります（正確には『一般固有ヴェクター』と呼ばれます）。

Cayley-Hamilton の定理に依れば $(B-3E)^2=O$ ですから、任意の $\mathbb{v}$ に対して

$$(B-3E)^2\mathbb{v}=\mathbb{o}$$

ですが、$(B-3E)\mathbb{v}=\mathbb{o}$ となるヴェクターは今求めた１次元分しかありませんから、残りのもう１次元分では

$$(B-3E)\mathbb{v}\neq\mathbb{o},\quad \text{かつ}\quad (B-3E)^2\mathbb{v}=\mathbb{o}$$

となっていなければならず、これは $(B-3E)\mathbb{v}$ が固有値 3 に関する固有ヴェクターである事を意味していますから、$(B-3E)\mathbb{v}=k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ です（$k\neq 0$）。

この時 $\frac{1}{k}\mathbb{v}=\mathbb{w}$ と置けば、$(B-3E)\mathbb{w}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が成り立っており、この様な $\mathbb{w}=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ を具体的に求めてみると、

$$\begin{cases} -4w_1+8w_2=2 \\ -2w_1+4w_2=1 \end{cases}$$

を解けば良いのですがこれらは同じ式であって $w_1=2w_2-\frac{1}{2}$ ですから例えば $\mathbb{w}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ はこれを満たしています：

$$B\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

すると、

$$\begin{aligned} B^2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} &= 3B\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}+B\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3\left\{3\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}+3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3^2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}+(3+3)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$B^3\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}=3^2B\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}+(3+3)B\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3^2 \left\{ 3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + (3+3)3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= 3^3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + (3^2+3^2+3^2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となっていて、一般には

$$B^n \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 3^n \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + n3^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たしていると思われます。実際、初項が満たしている事は明らかであり、また、

$$B \left\{ 3^n \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + n3^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = 3^n \left\{ 3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + n3^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= 3^{n+1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + (n+1)3^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に依れば帰納法から任意の n でも成り立っている事が分かります。

このようにして得られた固有ヴェクター $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とヴェクター $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ を使ってさっきと同様に初項を和で表してみると

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= p \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

から、

$$\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となり

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書けてしまいます。これを使えば

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix}$$
$$= B^n \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= B^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2B^n \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= 3^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot 3^n \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 2n3^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= (2n+3)3^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (4n+3)3^{n-1} \\ (2n+3)3^{n-1} \end{pmatrix}$$

が分かります。 □

Exercise

基本演習 1 今日学んだ固有値と固有ヴェクターを使う方法によって次の漸化式を満たす数列の一般項を求めて下さい。

(1) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n \end{cases}, \quad a_0 = 1,\, b_0 = 1$

(2) $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 7a_n - 2b_n \end{cases}, \quad a_0 = 1,\, b_0 = -1$

(3) $\begin{cases} c_{n+1} = -c_n + 9d_n \\ d_{n+1} = -c_n + 5d_n \end{cases}, \quad c_0 = 2,\, d_0 = 1$

発展演習 2 次の漸化式を満たす数列の一般項はどうやって求めたら良いでしょうか。

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n - w_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}, \quad v_0 = 1,\, w_0 = -2$$

発展演習 3 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の n 乗はどうやって求めたら良いでしょうか。

Exercise　解答例

> **基本演習 1** 今日学んだ固有値と固有ヴェクターを使う方法によって次の漸化式を満たす数列の一般項を求めて下さい。
>
> (1) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n \end{cases}, \quad a_0 = 1,\, b_0 = 1$
>
> (2) $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 7a_n - 2b_n \end{cases}, \quad a_0 = 1,\, b_0 = -1$
>
> (3) $\begin{cases} c_{n+1} = -c_n + 9d_n \\ d_{n+1} = -c_n + 5d_n \end{cases}, \quad c_0 = 2,\, d_0 = 1$

(1) このタイプの漸化式は行列を使って

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

と書く事が出来ますが、まず係数行列（これを A とします）の固有値と固有ヴェクターを求めておきましょう。

まず固有値ですが、２つの固有値を足して 5、掛けて 6 になるわけですからそれらは $2, 3$ です。

次に固有ヴェクターですが、固有値 2 に対応した固有ヴェクターとは、すなわち $(A-2E)\mathbb{x} =$ となる様なヴェクターでしたから、$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とした上で成分で書いた連立方程式：

$$\begin{cases} -x - 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

を解けば良いのですが、この２式は同じ式であって、$x = -2y$ ですから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって固有値 2 に対応した固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

一方、固有値 3 に対応した固有ヴェクターとは、すなわち $(A-2E)\mathbb{x} =$ となる様なヴェクターでしたから、$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とした上で成分で書いた連立方程式：

$$\begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

を解けば良いのですが、この２式は同じ式であって、$x = -y$ ですから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって固有値 3 に対応した固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

これら固有ヴェクターは平行ではありませんので与えられた初項を固有ヴェクターの和で書く事が出来ます。実際、

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left\{ p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= p \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から、

$$\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となり

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書けてしまいますから、

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \left\{ -2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = -2 \cdot 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \left\{ -2^2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = -2^3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3^3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \left\{ -2^n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = -2^{n+1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3^{n+1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって漸化式は解けてしまい、結局、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = -2^{n+1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3^{n+1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3^{n+1} \\ -2^{n+1} + 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

が求める一般項です。

(2) 係数行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ヴェクターは

固有値	5	-4
固有ヴェクター	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

です。また、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

を解けば $v = \frac{5}{9}, w = \frac{2}{9}$ が得られます。従って

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v5^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + w(-4)^n \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5^{n+1} - (-4)^{n+1} \\ 5^{n+1} - 14(-4)^n \end{pmatrix}$$

となります。

(3) 係数行列 $\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値は 2 のみであり、固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ のみです。このとき

$$\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \mathbb{p} = 2\mathbb{p} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるようなヴェクター $\mathbb{p}$ の 1 つは $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり、

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

を解けば $v = w = 1$ となります。従って

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (2^n + n2^{n-1}) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 4 + 3n \\ 2 + n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります。 □

発展演習 2 次の漸化式を満たす数列の一般項はどうやって求めたら良いでしょうか。

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n - w_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}, \quad v_0 = 1,\ w_0 = -2$$

固有値がないパターンですね。固有ヴェクターが 1 本もありません。さてどうしますか・・・　発展演習 4 参照。

発展演習 3 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の n 乗はどうやって求めたら良いでしょうか。

試しに計算してみると、4 乗が $-4E$ になっている事が分かるのでこれを利用すれば、行列を M として

$$M^{4k} = (-4)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{4k+1} = (-4)^k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{4k+2} = (-4)^k \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{4k+3} = (-4)^k \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

と書けます。 □