

連立漸化式と固有値

1 連立2項間漸化式

1.1 固有ベクトルを使う方法

例題 1.1 次の様な連立線形漸化式：

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - b_n \\ b_{n+1} = 6a_n - 2b_n \end{cases}, \quad a_0 = 1, b_0 = 2$$

を満たす数列 $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$, $\{b_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ を求めて下さい。

【解答例】このタイプの漸化式は行列を使って

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

と書く事が出来ます。具体的な計算は省略しますが、係数行列の固有値は $-1, 4$ で、対応した固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ になっております。

ここでもしも $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ がこの係数行列の固有ベクトルだったら、式(1.1)の示す“行列倍”と云うのはただの定数倍になってしまいますよね。

例えば初項が（実際は違いますが）仮に $a_0 = 1, b_0 = 1$ だったならば、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \left\{ 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = 4^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ &\vdots \\ \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \left\{ 4^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = 4^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となってしまい、漸化式は簡単に解けてしまいます。

もちろん現実の問題では初項は $a_0 = 1, b_0 = 2$ ですからこう上手く行くわけではありませんが、『初項が固有ベクトルだったら簡単なのに』と云う事、これは大きなヒントになりますね。

いいですか、初項が固有ベクトルだったら良いんですね？ だったら与えられた初項を強引に固有ベクトルで書いてしまおうと、そう云うわけですよ。要するに

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書けるのならば、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \left\{ p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = -p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 4r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \left\{ -p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 4r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = (-1)^2 p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 4^2 r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ &\vdots \\ \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \left\{ (-1)^{n-1} p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 4^{n-1} r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = (-1)^n p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 4^n r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となりますから、漸化式は簡単に解けてしまいますよね。

後は p, r の具体的な値を求めてやればオッケーです。しかしそれも、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \left\{ p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から、

$$\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

と求まってしまうので、結局、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = (-1)^n p \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 4^n r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^n}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{4 \cdot 4^n}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} (-1)^n + 4 \cdot 4^n \\ 6(-1)^n + 4 \cdot 4^n \end{pmatrix}$$

が求める一般項です。□

1.2 固有ベクトルが足りない場合

例題 1.2 次の漸化式を満たす数列 $\{c_n\}, \{d_n\}$ の一般項を求めて下さい。

$$\begin{cases} c_{n+1} = -c_n + 8d_n \\ d_{n+1} = -2c_n + 7d_n \end{cases}, \quad c_0 = 1, d_0 = 1.$$

【解答例】このタイプの漸化式は行列を使って

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

と書く事が出来ますが、まず係数行列（これを B とします）の固有値と固有ベクトルを求めておきましょう。

まず固有値ですが、固有方程式の係数を考えれば、解と係数の関係によって、2つの固有値を足して6、掛けて9になるわけですからそれは3（重根）です。

次に固有ベクトルですが、固有値3に対応した固有ベクトルとは、すなわち $(B - 3E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となる様なベクトルでしたから、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とした上で成分で書いた連立方程式：

$$\begin{cases} -4x + 8y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

を解けば良いのですが、この2式は同じ式であって、 $x = 2y$ ですから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となつて固有値3に対応した固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のみです。

固有ベクトルが1次元分しかありませんので前節の様なやり方は適用出来ません。そこで次の様に『固有ベクトルではないが固有ベクトルらしきもの』を見つけ出して使う事になります（正確には『一般固有ベクトル』と呼ばれます）。

Cayley-Hamilton の定理に依れば $(B - 3E)^2 = O$ ですから、任意の \mathbf{v} に対して

$$(B - 3E)^2 \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

ですが、 $(B - 3E)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ となるベクトルは今求めた1次元分しかありませんから、残りのもう1次元分では

$$(B - 3E)\mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \quad \text{かつ} \quad (B - 3E)^2 \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

となっていなければならず、これは $(B - 3E)\mathbf{v}$ が固有値3に関する固有ベクトルである事を意味していますから、 $(B - 3E)\mathbf{v} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ です ($k \neq 0$)。

この時 $\frac{1}{k}\mathbf{v} = \mathbf{w}$ と置けば、 $(B - 3E)\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が成り立っており、この様な $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

を具体的に求めてみると、

$$\begin{cases} -4w_1 + 8w_2 = 2 \\ -2w_1 + 4w_2 = 1 \end{cases}$$

を解けば良いのですがこれらは同じ式であって $w_1 = 2w_2 - \frac{1}{2}$ ですから例えば $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ はこれを満たしています：

$$B \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

すると、

$$\begin{aligned} B^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} &= 3B \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3 \left\{ 3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + (3+3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$B^3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 3^2 B \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + (3+3)B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3^2 \left\{ 3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + (3+3)3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= 3^3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + (3^2 + 3^2 + 3^2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となっていて、一般には

$$B^n \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 3^n \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + n3^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たしていると思われます。実際、初項が満たしている事は明らかであり、また、

$$\begin{aligned}
 B \left\{ 3^n \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + n3^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &= 3^n \left\{ 3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + n3^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= 3^{n+1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + (n+1)3^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

が分かります。

□

に依れば帰納法から任意の n でも成り立っている事が分かります。

このようにして得られた固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とベクトル $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ を使ってさっきと同様に初項を和で表してみると

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
 &= p \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

から、

$$\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となり

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書いてしまいます。これを使えば

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix}$$

Exercise

基本演習 1 今日学んだ固有値と固有ベクトルを使う方法によって次の漸化式を満たす数列の一般項を求めて下さい。

$$(1) \begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n \end{cases}, \quad a_0 = 1, b_0 = 1$$

$$(2) \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 7a_n - 2b_n \end{cases}, \quad a_0 = 1, b_0 = -1$$

$$(3) \begin{cases} c_{n+1} = -c_n + 9d_n \\ d_{n+1} = -c_n + 5d_n \end{cases}, \quad c_0 = 2, d_0 = 1$$

発展演習 2 次の漸化式を満たす数列の一般項はどうやって求めたら良いでしょうか。

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n - w_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}, \quad v_0 = 1, w_0 = -2$$

発展演習 3 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の n 乗はどうやって求めたら良いでしょうか。