

微分方程式・漸化式・行列のべき乗

10.1 同次であって特性方程式が 2 実数解の場合

10.1.1 微分方程式

例題 10.1 微分方程式：

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$$

の一般解を求めて下さい。

この方程式の特性方程式は $t^2 - 5t + 6 = (t - 2)(t - 3) = 0$ なので、

$$5 = 2 + 3, \quad 6 = 2 \cdot 3$$

であって、方程式は次のように 2 通りに変形される：

$$\begin{cases} f''(x) - 2f'(x) = 3\{f'(x) - 2f(x)\} \\ f''(x) - 3f'(x) = 2\{f'(x) - 3f(x)\} \end{cases}$$

ここで $f'(x) - 2f(x) = g(x)$, $f'(x) - 3f(x) = h(x)$ と置けば、

$$\begin{cases} g'(x) = 3g(x) \\ h'(x) = 2h(x) \end{cases}$$

なので、これは簡単に解けて $g(x) = e^{3x}G$, $h(x) = e^{2x}H$ が一般解です (G, H は任意の定数)。従って元の関数 $f(x)$ による記述にもとせば、

$$\begin{cases} f'(x) - 2f(x) = e^{3x}G \\ f'(x) - 3f(x) = e^{2x}H \end{cases}$$

であり、第 1 式から第 2 式を引けば、

$$f(x) = e^{3x}G - e^{2x}H$$

が得られ、これが一般解です (G, H は任意の定数)。

10.1.2 漸化式

例題 10.2 漸化式：

$$F_{n+2} - 5F_{n+1} + 6F_n = 0$$

の一般解を求めて下さい。

この漸化式の特性方程式は $t^2 - 5t + 6 = (t - 2)(t - 3) = 0$ なので、

$$5 = 2 + 3, \quad 6 = 2 \cdot 3$$

であって、漸化式は次のように 2 通りに変形される：

$$\begin{cases} F_{n+2} - 2F_{n+1} = 3\{F_{n+1} - 2F_n\} \\ F_{n+2} - 3F_{n+1} = 2\{F_{n+1} - 3F_n\} \end{cases}$$

ここで $F_{n+1} - 2F_n = G_n$, $F_{n+1} - 3F_n = H_n$ と置けば、

$$\begin{cases} G_{n+1} = 3G_n \\ H_{n+1} = 2H_n \end{cases}$$

なので、これは簡単に解けて $G_n = 3^n G$, $H_n = 2^n H$ が一般解です (G, H は任意の定数)。従って元の数列 F_n による記述にもとせば、

$$\begin{cases} F_{n+1} - 2F_n = 3^n G \\ F_{n+1} - 3F_n = 2^n H \end{cases}$$

であり、第 1 式から第 2 式を引けば、

$$F_n = 3^n G - 2^n H$$

が得られ、これが一般解です (G, H は任意の定数)。

10.2 同次であって特性方程式が重解の場合

10.2.1 微分方程式

例題 10.3 微分方程式：

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 0$$

の一般解を求めて下さい。

この方程式の特性方程式は $t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2 = 0$ なので、方程式は次のように変形されます：

$$f''(x) - 2f'(x) = 2\{f'(x) - 2f(x)\}.$$

ここで $f'(x) - 2f(x) = g(x)$ と置けば、

$$g'(x) = 2g(x)$$

なので、これは簡単に解けて $g(x) = Ge^{2x}$ が一般解です (G は任意の定数)。従って元の関数 $f(x)$ による記述にもとせば、

$$f'(x) - 2f(x) = Ge^{2x}$$

であり、両辺に e^{-2x} を掛ければ

$$e^{-2x}f'(x) - 2e^{-2x}f(x) = G$$

が分かります。ここで $e^{-2x}f(x) = h(x)$ と置けば

$$h'(x) = G$$

なのでこれは簡単に解けて

$$\begin{aligned} h(x) &= Gx + H \\ e^{-2x}f(x) &= Gx + H \\ f(x) &= Gxe^{2x} + He^{2x} \end{aligned}$$

が得られ、これが一般解です (G, H は任意の定数)。

10.2.2 漸化式

例題 10.4 漸化式：

$$F_{n+2} - 4F_{n+1} + 4F_n = 0$$

の一般解を求めて下さい。

この漸化式の特性方程式は $t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2 = 0$ なので、漸化式は次のように変形されます：

$$F_{n+2} - 2F_{n+1} = 2\{F_{n+1} - 2F_n\}.$$

ここで $F_{n+1} - 2F_n = G_n$ と置けば、

$$G_{n+1} = 2G_n$$

なので、これは簡単に解けて $G_n = G2^n$ が一般解です (G は任意の定数)。従って元の数列 F_n による記述にもとせば、

$$F_{n+1} - 2F_n = G2^n$$

であり、両辺に $2^{-(n+1)}$ を掛ければ

$$\frac{F_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{F_n}{2^n} = \tilde{G}$$

が分かります。ここで $\frac{F_n}{2^n} = H_n$ と置けば

$$H_{n+1} - H_n = \tilde{G}$$

なのでこれは簡単に解けて

$$\begin{aligned} H_n &= \tilde{G}n + H \\ \frac{F_n}{2^n} &= \tilde{G}n + H \\ F_n &= \tilde{G}n2^n + H2^n \end{aligned}$$

が得られ、これが一般解です ($\tilde{G}, H$ は任意の定数)。

10.3 行列のべき乗

(2) Hamilton-Cayley の定理から

基本演習 1 次の行列に対して Hamilton-Cayley の定理を使って n 乗を求めて下さい。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) C = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) Hamilton-Cayley の定理によれば

$$O = A^2 - 5A + 6E = (A - 2E)(A - 3E) = (A - 3E)(A - 2E)$$

が成り立っており、これは次の 2 通りに変形されます：

$$\begin{cases} A(A - 2E) = 3(A - 2E) & \cdots (1) \\ A(A - 3E) = 2(A - 3E) & \cdots (2) \end{cases}$$

(1) から

$$\begin{aligned} A^n(A - 2E) &= 3^n(A - 2E) \\ A^{n+1} - 2A^n &= 3^n(A - 2E) \cdots (3) \end{aligned}$$

であり、(2) から

$$\begin{aligned} A^n(A - 3E) &= 2^n(A - 3E) \\ A^{n+1} - 3A^n &= 2^n(A - 3E) \cdots (4) \end{aligned}$$

が得られますから、(3)-(4) として

$$\begin{aligned} A^n &= 3^n(A - 2E) - 2^n(A - 3E) \\ &= 3^n \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2^n \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3^n + 2^{n+1} & -2 \cdot 3^n + 2^{n+1} \\ 3^n - 2^n & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が分かります。

が得られ、

$$C(C - 2E) = 2(C - 2E)$$

と変形されます。従って

$$C^n(C - 2E) = 2^n(C - 2E)$$

$$C^{n+1} - 2C^n = 2^n(C - 2E)$$

$$\frac{C^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{C^n}{2^n} = \frac{1}{2}(C - 2E)$$

ですから、

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{C^j}{2^j} - \frac{C^{j-1}}{2^{j-1}} \right) = \frac{n}{2}(C - 2E)$$

$$\frac{C^n}{2^n} - E = \frac{n}{2}(C - 2E)$$

$$C^n = n2^{n-1}(C - 2E) + 2^n E$$

$$= n2^{n-1} \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2^{n-1} \begin{pmatrix} -3n + 2 & 9n \\ -n & 3n + 2 \end{pmatrix}$$

です。

□

Exercise

基本演習 2 次の行列に対して Hamilton-Cayley の定理を使って各成分の満たす 3 項間漸化式を導き、これを解いて行列の n 乗を求めて下さい。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

基本演習 3 次の行列に対して Hamilton-Cayley の定理を使って n 乗を求めて下さい。

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

基本演習 4 次の各漸化式の一般解を求めて下さい ($n \geq 0$)。

$$(1) A_{n+2} - 3A_{n+1} + 2A_n = 0 \quad (2) A_{n+2} - 3A_{n+1} + 2A_n = 2n + 1$$

$$(3) A_{n+2} - 3A_{n+1} + 2A_n = 2^n$$

発展演習 5 次の漸化式について以下の問いに答えて下さい。

$$G_{n+2} + G_{n+1} - 6G_n = 0 \quad (n \geq 0)$$

(1) 特性方程式が $t^2 + t - 6 = (t+3)(t-2) = 0$ なので $G_{n+2} + 3G_{n+1} = 2(G_{n+1} + 3G_n)$ と変形されますが、ここで $G_{n+1} + 3G_n = H_n$ と置いて H_n の満たす漸化式を解いて一般解を求めて下さい。

(2) その結果を使って非同次漸化式: $G_{n+1} + 3G_n = H_n$ において両辺を $(-3)^{n+1}$ で割って、 $J_n = \frac{G_n}{(-3)^n}$ と置くことによって J_n の漸化式を求め、それを解いて一般解 J_n 、更には G_n を求めて下さい。

(3) (2) とは別のやり方で非同次方程式: $G_{n+1} + 3G_n = H_n$ を考えてみます。まず対応した同次式の一般解を求めて下さい。次に非同次式の解を一つ何でも良いので求めて下さい。これによって非同次漸化式の一般解 G_n を求めて下さい。

発展演習 6 次の漸化式について以下の問いに答えて下さい。

$$F_{n+3} - 4F_{n+2} + 5F_{n+1} - 2F_n = 0 \quad (n \geq 0)$$

- (1) 特性方程式は $t = 1$ を解としてもつことを示して下さい。
 (2) 従って漸化式は

$$(F_{n+3} - F_{n+2}) - 3(F_{n+2} - F_{n+1}) + 2(F_{n+1} - F_n) = 0$$

と変形することが出来ますが、これを使って一般解を求めて下さい。

発展演習 7 次の漸化式・初期条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めて下さい。

$$(2n+2)a_n - na_{n+1} - 3n - 6 = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad a_1 = 4.$$

基本演習 8 θ は $\cos \theta \neq 1, \sin \theta \neq 0$ であるような実数であるとしします。次の漸化式・初期条件を満たす数列 $\{a_n\}$ について、以下の問いに答えて下さい。

$$a_{n+1} - a_n = \sin n\theta, \quad a_1 = 0.$$

- (1) 数列 $c_n = A \cos n\theta + B \sin n\theta$ が同じ漸化式を満たすような (漸化式のみであって、初期条件は満たす必要はありません) 実数の組 (A, B) を 1 組見つけて下さい。
 (2) $a_n - c_n$ を考える事によって数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めて下さい。

発展演習 9 次の漸化式・初期条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ について：

$$5a_n a_{n+1} = a_n - a_{n+1}, \quad a_1 = 1$$

a_2, a_3 を求め、更に一般項を求めて下さい。

基本演習 10 (1) 三角関数の積和変換公式により $\cos(n+1)\theta \cos \theta, \sin(n+1)\theta \cos \theta$ をそれぞれ和に変換してください。

(2) θ を定数とすると 2 つの数列 $\{\cos n\theta\}, \{\sin n\theta\}$ は同じ漸化式：

$$G_{n+2} - 2 \cos \theta G_{n+1} + G_n = 0 \quad (10.1)$$

を満たしていることを確認してください。

(3) 任意の定数 A, B に対して数列 $\{A \cos n\theta + B \sin n\theta\}$ は漸化式 (10.1) を満たすことを確認してください。

(4) $c \neq 0$ のとき 3 項間漸化式：

$$P_{n+2} + bP_{n+1} + cP_n = 0 \quad (10.2)$$

の特性方程式 $t^2 + bt + c = 0$ が非実数解をもつことと、漸化式 (10.2) が $Q_n = \frac{P_n}{\sqrt{c}^n}$ と置くことによって

$$Q_{n+2} - 2aQ_{n+1} + Q_n = 0 \quad (|a| < 1)$$

の形に変形できることは同値であることを示してください。

(5) 次の漸化式と初期条件を満たす数列の一般項を求めてください：

$$E_{n+2} - \sqrt{3}E_{n+1} + E_n = 0, \quad E_1 = \sqrt{3} + \frac{1}{2}, E_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$$

(6) 次の漸化式と初期条件を満たす数列の一般項を求めてください：

$$F_{n+2} + F_n = 0, \quad F_1 = 1, F_2 = -1.$$

参考：同次であって特性方程式が共役複素数解の場合

微分方程式

例題 10.5 微分方程式： $f''(x) + 2f'(x) + 5f(x) = 0$ の一般解を求めて下さい。

この方程式の特性方程式は $t^2 + 2t + 5 = (t + 1)^2 + 4 = 0$ です。虚数を表に出して計算するのなら、2つの異なる実数解の場合と全く同様にして解を求めることが出来ますが、ここでは虚数はなるべく表に出さずに実数でやってみたいと思います。

そのためにまず三角関数の満たす微分方程式を見ておきます：

$$(\cos kx)'' + k^2 \cos kx = 0,$$

$$(\sin kx)'' + k^2 \sin kx = 0.$$

次に方程式を三角関数の満たす微分方程式の形に変形して行きます。

$$\{f''(x) + f'(x)\} + \{f'(x) + f(x)\} + 4f(x) = 0$$

と変形出来ますが。ここで両辺に e^x を掛ければ

$$\{e^x f''(x) + e^x f'(x)\} + \{e^x f'(x) + e^x f(x)\} + 4e^x f(x) = 0$$

$$\{e^x f'(x)\}' + \{e^x f(x)\}' + 4e^x f(x) = 0$$

$$\{e^x f'(x) + e^x f(x)\}' + 4e^x f(x) = 0$$

$$\{e^x f(x)\}'' + 4e^x f(x) = 0$$

となっており、 $e^x f(x) = g(x)$ と置けばこれは

$$g''(x) + 4g(x) = 0$$

を意味しますので最初に見た三角関数の性質から簡単に解けて一般解は

$$g(x) = G \cos 2x + H \sin 2x$$

となっています。ここで元の関数 $f(x)$ の言葉に書き換えてやれば、

$$e^x f(x) = G \cos 2x + H \sin 2x$$

$$f(x) = G e^{-x} \cos 2x + H e^{-x} \sin 2x$$

となってこれが求める一般解です (G, H は任意の定数)。

漸化式

例題 10.6 漸化式： $F_{n+2} + 2F_{n+1} + 5F_n = 0$ の一般解を求めて下さい。

この漸化式の特性方程式は $t^2 + 2t + 5 = (t + 1)^2 + 4 = 0$ です。虚数を表に出して計算するのなら、2つの異なる実数解の場合と全く同様にして解を求めることが出来ますが、ここでは虚数はなるべく表に出さずに実数でやってみたいと思います。

そのためにまず三角関数の満たす漸化式を見ておきます：

$$\cos(n+2)\theta - 2\cos\theta \cos(n+1)\theta + \cos n\theta = 0,$$

$$\sin(n+2)\theta - 2\cos\theta \sin(n+1)\theta + \sin n\theta = 0.$$

次に漸化式を三角関数の満たす漸化式の形に変形して行きます。

$$F_{n+2} + 2F_{n+1} + 5F_n = 0$$

ここで両辺に $\sqrt{5}^{-(n+2)}$ を掛ければ、

$$\frac{F_{n+2}}{\sqrt{5}^{n+2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{F_{n+1}}{\sqrt{5}^{n+1}} + \frac{F_n}{\sqrt{5}^n} = 0$$

$$\frac{F_{n+2}}{\sqrt{5}^{n+2}} - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \frac{F_{n+1}}{\sqrt{5}^{n+1}} + \frac{F_n}{\sqrt{5}^n} = 0$$

となっており、 $\frac{F_n}{\sqrt{5}^n} = G_n$ 、 $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ となる角度を θ と置けばこれは

$$G_{n+2} - 2\cos\theta G_{n+1} + G_n = 0$$

を意味しますので最初に見た三角関数の性質から簡単に解けて一般解は

$$G_n = G \cos n\theta + H \sin n\theta$$

となっています。ここで元の数列 F_n の言葉に書き換えてやれば、

$$\frac{F_n}{\sqrt{5}^n} = G \cos n\theta + H \sin n\theta$$

$$F_n = G\sqrt{5}^n \cos n\theta + H\sqrt{5}^n \sin n\theta$$

となってこれが求める一般解です (G, H は任意の定数)。

Exercise 解答例

基本演習 3 次の行列に対して Hamilton-Cayley の定理を使って各成分の満たす 3 項間漸化式を導き、これを解いて行列の n 乗を求めて下さい。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ とおけば、Hamilton-Cayley の定理から

$$M^2 - 5M + 6E = O$$

であり、両辺に M^n を掛けて

$$M^{n+2} - 5M^{n+1} + 6M^n = O$$

が分かります。そこで 3 項間漸化式：

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \quad \cdots (*)$$

をまず一般の初期条件のもとに解いて、後で M^n の各成分に対応した初期条件を 4 通り考えることにします。

対応した固有方程式は

$$X^2 - 5X + 6 = 0$$

ですからその解は 2, 3 です。従って漸化式は次のように 2 通りに変形されます：

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n) \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n) \end{cases}$$

ここで $a_{n+1} - 2a_n = P_n$, $a_{n+1} - 3a_n = Q_n$ と置けばこれらはそれぞれ公比 3, 2 の等比数列であって一般項は

$$P_n = 3^n P_0 = 3^n (a_1 - 2a_0), \quad Q_n = 2^n Q_0 = 2^n (a_1 - 3a_0)$$

となることが分かります。すると $P_n - Q_n = a_n$ であることに注意すれば

$$a_n = 3^n (a_1 - 2a_0) - 2^n (a_1 - 3a_0)$$

が得られます。

M^n の (1,1)-成分を b_n と置けば、数列 $\{b_n\}$ は漸化式 (*) を満たし、初期値は

$$b_0 = 1, b_1 = 1$$

ですから、

$$b_n = -3^n + 2 \cdot 2^n$$

です。また、 M^n の (1,2)-成分を c_n と置けば、数列 $\{c_n\}$ は漸化式 (*) を満たし、初期値は

$$c_0 = 0, c_1 = -2$$

ですから、

$$c_n = -2 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n$$

です。更に、 M^n の (2,1)-成分を d_n と置けば、数列 $\{d_n\}$ は漸化式 (*) を満たし、初期値は

$$d_0 = 0, d_1 = 1$$

ですから、

$$d_n = 3^n - 2^n$$

です。最後に、 M^n の (2,2)-成分を e_n と置けば、数列 $\{e_n\}$ は漸化式 (*) を満たし、初期値は

$$e_0 = 1, e_1 = 4$$

ですから、

$$e_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

です。

以上から

$$M^n = \begin{pmatrix} -3^n + 2 \cdot 2^n & -2 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n \\ 3^n - 2^n & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}$$

です。

(2) $M = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ とおけば、Hamilton-Cayley の定理から

$$M^2 - 4M + 4E = O$$

であり、両辺に M^n を掛けて

$$M^{n+2} - 4M^{n+1} + 4M^n = O$$

が分かります。そこで 3 項間漸化式：

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \quad \cdots (***)$$

をまず一般の初期条件のもとに解いて、後で M^n の各成分に対応した初期条件を 4 通り考えることにします。

対応した固有方程式は

$$X^2 - 4X + 4 = 0$$

ですからその解は 2 です。従って漸化式は次のように変形されます：

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$$

ここで $a_{n+1} - 2a_n = P_n$ と置けばこれは公比 2 の等比数列であって一般項は

$$P_n = 2^n P_0 = 2^n (a_1 - 2a_0)$$

となることが分かり、

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n(a_1 - 2a_0)$$

が得られます。ここで両辺を 2^{n+1} で割れば

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2}(a_1 - 2a_0)$$

ですから、 $Q_n = \frac{a_n}{2^n}$ と置けば

$$Q_{n+1} - Q_n = \frac{1}{2}(a_1 - 2a_0)$$

ですから数列 $\{Q_n\}$ は公差 $\frac{1}{2}(a_1 - 2a_0)$ の等差数列であって、一般項は

$$Q_n = Q_0 + \frac{n}{2}(a_1 - 2a_0) = a_0 + \frac{1}{2}(a_1 - 2a_0)n$$

となります。従って

$$a_n = 2^n Q_n = a_0 2^n + \frac{1}{2}(a_1 - 2a_0)n 2^n$$

が得られます。

M^n の (1,1)-成分を b_n と置けば、数列 $\{b_n\}$ は漸化式 $(***)$ を満たし、初期値は

$$b_0 = 1, b_1 = -1$$

ですから、

$$b_n = 2^n - \frac{3}{2}n 2^n = (2 - 3n)2^{n-1}$$

です。また、 M^n の (1,2)-成分を c_n と置けば、数列 $\{c_n\}$ は漸化式 $(***)$ を満たし、初期値は

$$c_0 = 0, c_1 = 9$$

ですから、

$$c_n = \frac{9}{2}n 2^n = 9n 2^{n-1}$$

です。更に、 M^n の (2,1)-成分を d_n と置けば、数列 $\{d_n\}$ は漸化式 $(***)$ を満たし、初期値は

$$d_0 = 0, d_1 = -1$$

ですから、

$$d_n = -\frac{1}{2}n 2^n = -n 2^{n-1}$$

です。最後に、 M^n の (2,2)-成分を e_n と置けば、数列 $\{e_n\}$ は漸化式 $(***)$ を満たし、初期値は

$$e_0 = 1, e_1 = 5$$

ですから、

$$e_n = 2^n + \frac{3}{2}n 2^n = (2 + 3n)2^{n-1}$$

です。

以上から

$$M^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 - 3n & 9n \\ -n & 2 + 3n \end{pmatrix}$$

です。

□

(3) $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ とおけば、Hamilton-Cayley の定理から

$$M^2 - M - 20E = O$$

であり、両辺に M^n を掛けて

$$M^{n+2} - M^{n+1} - 20M^n = O$$

が分かります。そこで 3 項間漸化式：

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 20a_n = 0 \quad \cdots (**)$$

をまず一般の初期条件のもとに解いて、後で M^n の各成分に対応した初期条件を 4 通り考えることにします。

対応した固有方程式は

$$X^2 - X - 20 = 0$$

ですからその解は $5, -4$ です。従って漸化式は次のように 2 通りに変形されます：

$$\begin{cases} a_{n+2} - 5a_{n+1} = -4(a_{n+1} - 5a_n) \\ a_{n+2} + 4a_{n+1} = 5(a_{n+1} + 4a_n) \end{cases}$$

ここで $a_{n+1} - 5a_n = P_n, a_{n+1} + 4a_n = Q_n$ と置けばこれらはそれぞれ公比 $-4, 5$ の等比数列であって一般項は

$$P_n = (-4)^n P_0 = (-4)^n(a_1 - 5a_0), \quad Q_n = 5^n Q_0 = 5^n(a_1 + 4a_0)$$

となることが分かります。すると $Q_n - P_n = 9a_n$ であることに注意すれば

$$9a_n = 5^n(a_1 + 4a_0) - (-4)^n(a_1 - 5a_0)$$

が得られます。

M^n の (1,1)-成分を b_n と置けば、数列 $\{b_n\}$ は漸化式 $(**)$ を満たし、初期値は

$$b_0 = 1, b_1 = 3$$

ですから、

$$9b_n = 7 \cdot 5^n + 2 \cdot (-4)^n$$

です。また、 M^n の (1,2)-成分を c_n と置けば、数列 $\{c_n\}$ は漸化式 $(**)$ を満たし、初期値は

$$c_0 = 0, c_1 = 2$$

ですから、

$$9c_n = 2 \cdot 5^n - 2 \cdot (-4)^n$$

です。更に、 M^n の (2,1)-成分を d_n と置けば、数列 $\{d_n\}$ は漸化式 (**) を満たし、初期値は

$$d_0 = 0, d_1 = 7$$

ですから、

$$9d_n = 7 \cdot 5^n - 7(-4)^n$$

です。最後に、 M^n の (2,2)-成分を e_n と置けば、数列 $\{e_n\}$ は漸化式 (**) を満たし、初期値は

$$e_0 = 1, e_1 = -2$$

ですから、

$$9e_n = 2 \cdot 5^n + 7(-4)^n$$

です。

以上から

$$M^n = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 \cdot 5^n + 2 \cdot (-4)^n & 2 \cdot 5^n - 2 \cdot (-4)^n \\ 7 \cdot 5^n - 7(-4)^n & 2 \cdot 5^n + 7(-4)^n \end{pmatrix}$$

です。

□

基本演習 4 次の行列に対して Hamilton-Cayley の定理を使って n 乗を求めて下さい。

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Hamilton-Cayley の定理により、

$$O = B^2 - B - 20E = (B - 5E)(B + 4E) = (B + 4E)(B - 5E)$$

が成り立っており、これは次の 2 通りに変形されます：

$$\begin{cases} B(B - 5E) = -4(B - 5E) & \cdots (1) \\ B(B + 4E) = 5(B + 4E) & \cdots (2) \end{cases}$$

(1) から

$$\begin{aligned} B^n(B - 5E) &= (-4)^n(B - 5E) \\ B^{n+1} - 5B^n &= (-4)^n(B - 5E) \cdots (3) \end{aligned}$$

であり、(2) から

$$\begin{aligned} B^n(B + 4E) &= 5^n(B + 4E) \\ B^{n+1} + 4B^n &= 5^n(B + 4E) \cdots (4) \end{aligned}$$

が得られますから、(4)-(3) として

$$9B^n = 5^n(B + 4E) - (-4)^n(B - 5E)$$

$$\begin{aligned} &= 5^n \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} - (-4)^n \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & -7 \end{pmatrix} \\ B &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 \cdot 5^n + 2 \cdot (-4)^n & 2 \cdot 5^n - 2 \cdot (-4)^n \\ 7 \cdot 5^n - 7(-4)^n & 2 \cdot 5^n + 7(-4)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が分かります。

□

基本演習 5 次の各漸化式の一般解を求めて下さい。

$$(1) A_{n+2} - 3A_{n+1} + 2A_n = 0$$

【解答例】特性方程式は $t^2 - 3t + 2 = (t - 1)(t - 2) = 0$ なので、この漸化式は

$$\begin{cases} A_{n+2} - A_{n+1} = 2(A_{n+1} - A_n) \\ A_{n+2} - 2A_{n+1} = A_{n+1} - 2A_n \end{cases}$$

と 2 通りに変形されます。従って $A_{n+1} - A_n = B_n$, $A_{n+1} - 2A_n = C_n$ と置けば、これらはそれぞれ公比 2, 1 の等比数列なので、その一般項は $B_n = D_1 2^n$, $C_n = D_2$ です (D_1, D_2 は任意の定数)。これを元に戻せば

$$\begin{cases} A_{n+1} - A_n = D_1 2^n \\ A_{n+1} - 2A_n = D_2 \end{cases}$$

であり、第 1 式から第 2 式を辺々引けば $A_n = D_1 2^n - D_2$ が得られ、これが求める一般解です (D_1, D_2 は任意の定数)。

□

$$(2) A_{n+2} - 3A_{n+1} + 2A_n = 2n + 1$$

【解答例】対応した同次漸化式の一般解は (1) で既に求めてあるので、ここでは元の非同次漸化式の解を 1 つ見つける事だけを考えます。

右辺の形から $an + b$ が解であると仮定すると、

$$\begin{aligned} a(n + 2) + b - 3a(n + 1) - 3b + 2an + 2b &= 2n + 1 \\ -a &= 2n + 1 \end{aligned}$$

となってしまう、これを満たすような a, b は存在しません。この置き方は失敗でした。

気を取り直して、次に $an^2 + bn + c$ を漸化式の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} a(n + 2)^2 + b(n + 2) + c - 3a(n + 1)^2 - 3b(n + 1) - 3c + 2an^2 + 2bn + 2c \\ = -2an + (a - b) \end{aligned}$$

ですから、 $a = -1, b = -2$ であれば $2n + 1$ となって漸化式を満たす事が分かります (c は何でも構いません)。従って $-n^2 - 2n$ は 1 つの解ですから、結局求める一般解は

$$A_n = D_1 2^n - D_2 - n^2 - 2n$$

です (D_1, D_2 は任意の定数)。

□

$$(3) A_{n+2} - 3A_{n+1} + 2A_n = 2^n$$

【解答例】これも同様に対応した同次漸化式の一般解が分かっていますので、解を1つ見つける事に専念します。

$a2^n$ は同次式の解ですから、この型のものでは上手く行きません。そこで $an2^n$ の型のもので探してみましょう。これを漸化式の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} & a(n+2)2^{n+2} - 3a(n+1)2^{n+1} + 2an2^n \\ &= (4an + 8a - 6an - 6a + 2an)2^n \\ &= 2a2^n \end{aligned}$$

となりますから、 $a = \frac{1}{2}$ ならば漸化式を満たす事が分かります。従って $\frac{1}{2}n2^n = n2^{n-1}$ は1つの解です。

以上により求める一般解は

$$A_n = D_1 2^n - D_2 + n2^{n-1}$$

です (D_1, D_2 は任意の定数)。

□

発展演習 6 次の漸化式について以下の問いに答えて下さい。

$$G_{n+2} + G_{n+1} - 6G_n = 0$$

(1) 特性方程式が $t^2 + t - 6 = (t+3)(t-2) = 0$ なので $G_{n+2} + 3G_{n+1} = 2(G_{n+1} + 3G_n)$ と変形されますが、ここで $G_{n+1} + 3G_n = H_n$ と置いて H_n の満たす漸化式を解いて一般解を求めて下さい。

(2) その結果を使って非同次漸化式 $G_{n+1} + 3G_n = H_n$ において両辺を $(-3)^{n+1}$ で割って、 $J_n = \frac{G_n}{(-3)^n}$ と置く事によって J_n の漸化式を求め、それを解いて一般解 J_n 、更には G_n を求めて下さい。

(3) (2) とは別のやり方で非同次方程式 $G_{n+1} + 3G_n = H_n$ を考えてみます。まず対応した同次式の一般解を求めて下さい。次に非同次式の解の一つ何でも良いので求めて下さい。これによって非同次漸化式の一般解 G_n を求めて下さい。

【解答例】(1) $H_{n+1} = 2H_n$ となるため、この一般解は $H_n = A2^n$ です (A は任意の定数)。

(2) この結果を使えば $G_{n+1} + 3G_n = A2^n$ ですが、両辺を $(-3)^{n+1}$ で割れば

$$J_{n+1} - J_n = \frac{G_{n+1}}{(-3)^{n+1}} - \frac{G_n}{(-3)^n} = -\frac{A}{3} \left(-\frac{2}{3} \right)^n$$

が得られます。そこで、

$$J_n - J_{n-1} = -\frac{A}{3} \left(-\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

$$J_{n-1} - J_{n-2} = -\frac{A}{3} \left(-\frac{2}{3} \right)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$J_1 - J_0 = -\frac{A}{3} \left(-\frac{2}{3} \right)^0$$

を全て足し合わせれば

$$\begin{aligned} J_n - J_0 &= -\frac{A}{3} \left\{ 1 + \left(-\frac{2}{3} \right) + \left(-\frac{2}{3} \right)^2 + \cdots + \left(-\frac{2}{3} \right)^{n-1} \right\} \\ &= -\frac{A}{3} \frac{1 - \left(-\frac{2}{3} \right)^n}{1 - \left(-\frac{2}{3} \right)} \\ &= \frac{A}{5} - \frac{A}{5} \left(-\frac{2}{3} \right)^n \\ J_n &= J_0 + \frac{A}{5} - \frac{A}{5} \left(-\frac{2}{3} \right)^n \\ \frac{G_n}{(-3)^n} &= J_0 + \frac{A}{5} - \frac{A}{5} \left(-\frac{2}{3} \right)^n \\ G_n &= \left(J_0 + \frac{A}{5} \right) (-3)^n - \frac{A}{5} 2^n \end{aligned}$$

が得られます。初項 $J_0 = G_0$ は漸化式とは独立に任意に決められるので、結局求める一般解は

$$G_n = A2^n + B(-3)^n$$

となります (A, B は任意の定数)。

(3) 対応した同次式は $G_{n+1} + 3G_n = 0$ ですが、これは公比 -3 の等比数列ですから、同次式の一般解は $B(-3)^n$ です。

あとは非同次式 $G_{n+1} + 3G_n = A2^n$ の解を1つ見つければよく、例えば $aA2^n$ が解であるためには

$$aA2^{n+1} + 3aA2^n = 5aA2^n = A2^n$$

すなわち、 $a = \frac{1}{5}$ であれば良い事が分かります。従って $\frac{A}{5}2^n$ は非同次式の解の1つです。

以上により、非同次漸化式 $G_{n+1} + 3G_n = A2^n$ の一般解は

$$G_n = B(-3)^n + \frac{A}{5} 2^n$$

となります。

以上によって、元の非同次漸化式の一般解は

$$G_n = A2^n + B(-3)^n$$

となります (A, B は任意の定数)。

□

発展演習 7 次の漸化式について以下の問いに答えて下さい。

$$F_{n+3} - 4F_{n+2} + 5F_{n+1} - 2F_n = 0$$

- (1) 特性方程式は $t = 1$ を解としてもつことを示して下さい。
 (2) 従って漸化式は

$$(F_{n+3} - F_{n+2}) - 3(F_{n+2} - F_{n+1}) + 2(F_{n+1} - F_n) = 0$$

と変形することが出来ますが、これを使って一般解を求めて下さい。

【解答例】(1) 特性方程式は $t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = 0$ ですが、 $t = 1$ はこの方程式を満たしていますから解の 1 つです。

- (2) この様に変形して $W_n = F_{n+1} - F_n$ と置けば、 W_n は漸化式：

$$W_{n+2} - 3W_{n+1} + 2W_n = 0$$

を満たす事が分かります。今度はこの漸化式の特性方程式を見るとそれは $t^2 - 3t + 2 = (t - 1)(t - 2) = 0$ ですから、この漸化式は

$$\begin{cases} W_{n+2} - W_{n+1} = 2(W_{n+1} - W_n) \\ W_{n+2} - 2W_{n+1} = W_{n+1} - 2W_n \end{cases}$$

と 2 通りに変形されます。従って $W_{n+1} - W_n = B_n$, $W_{n+1} - 2W_n = C_n$ と置けば、これらはそれぞれ公比 2, 1 の等比数列なので、その一般項は $B_n = D_1 2^n$, $C_n = D_2$ です (D_1, D_2 は任意の定数)。これを元に戻せば

$$\begin{cases} W_{n+1} - W_n = D_1 2^n \\ W_{n+1} - 2W_n = D_2 \end{cases}$$

であり、第 1 式から第 2 式を辺々引けば $W_n = D_1 2^n - D_2$ が得られます (D_1, D_2 は任意の定数)。この計算によって

$$F_{n+1} - F_n = D_1 2^n - D_2$$

が分かりましたので、

$$\begin{aligned} F_n - F_{n-1} &= D_1 2^{n-1} - D_2 \\ F_n - F_{n-1} &= D_1 2^{n-1} - D_2 \\ &\vdots \\ F_1 - F_0 &= D_1 2^0 - D_2 \end{aligned}$$

を全て加えれば、

$$\begin{aligned} F_n - F_0 &= D_1(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) - D_2 n \\ F_n &= F_0 + D_1 \frac{1 - 2^n}{1 - 2} - D_2 n \end{aligned}$$

$= F_0 - D_1 + D_1 2^n - D_2 n$
 が分かります。初項 F_0 は漸化式とは独立に任意に決められるので結局求める一般解は

$$F_n = A + B 2^n + C n$$

です (A, B, C は任意の定数)。

発展演習 8 次の漸化式・初期条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めて下さい。

$$(2n + 2)a_n - na_{n+1} - 3n - 6 = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad a_1 = 4.$$

$n(n + 1)$ で割って変形すれば

$$2 \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{3n+6}{n(n+1)}$$

なので、 $b_n = \frac{a_n}{n}$ と置けば

$$b_{n+1} - 2b_n = -\frac{3n+6}{n(n+1)}$$

ですが、右辺を部分分数分解すれば

$$-\frac{3n+6}{n(n+1)} = \frac{3}{n+1} - \frac{6}{n}$$

ですから

$$b_{n+1} - 2b_n = \frac{3}{n+1} - \frac{6}{n}$$

となります。ここで両辺を 2^{n+1} で割れば

$$\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{b_n}{2^n} = 3 \left\{ \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - \frac{1}{n2^n} \right\}$$

と変形されます。ここで $d_n = \frac{b_n}{2^n}$ と置けば、

$$d_{n+1} - d_n = 3 \left\{ \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - \frac{1}{n2^n} \right\}$$

ですから

$$\begin{aligned} d_n - d_1 &= \frac{3}{n2^n} - \frac{3}{2} \\ d_n &= \frac{3}{n2^n} - \frac{3}{2} + \frac{b_1}{2} \\ \frac{a_n}{n2^n} &= \frac{3}{n2^n} + \frac{1}{2} \\ a_n &= n2^{n-1} + 3 \end{aligned}$$

が得られます。

基本演習 9 θ は $\cos \theta \neq 1, \sin \theta \neq 0$ であるような実数であるとしします。次の漸化式・初期条件を満たす数列 $\{a_n\}$ について、以下の問いに答えて下さい。

$$a_{n+1} - a_n = \sin n\theta, \quad a_1 = 0.$$

(1) 数列 $c_n = A \cos n\theta + B \sin n\theta$ が同じ漸化式を満たすような (漸化式のみであって、初期条件は満たす必要はありません) 実数の組 (A, B) を 1 組見つけて下さい。

(2) $a_n - c_n$ を考える事によって数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めて下さい。

(1) $c_n = A \cos n\theta + B \sin n\theta$ の型の数列 $\{c_n\}$ でこの漸化式を満たしているものを探してみましょう。そのためにはまず

$$\begin{aligned} \sin n\theta &= A \cos(n+1)\theta + B \sin(n+1)\theta - A \cos n\theta - B \sin n\theta \\ &= A \cos n\theta \cos \theta - A \sin n\theta \sin \theta + B \sin n\theta \cos \theta + B \cos n\theta \sin \theta \\ &\quad - A \cos n\theta - B \sin n\theta \\ 0 &= (A \cos \theta + B \sin \theta - A) \cos n\theta + (-A \sin \theta + B \cos \theta - B) \sin n\theta \end{aligned}$$

が成り立っていなければなりませんから、定数部分が共に 0 であれば十分であり、連立方程式：

$$\begin{cases} (\cos \theta - 1)A + (\sin \theta)B = 0 \\ (-\sin \theta)A + (\cos \theta - 1)B = 1 \end{cases}$$

が得られます。第 1 式の $\sin \theta$ 倍と第 2 式の $\cos \theta - 1$ 倍を辺々足せば

$$\begin{aligned} \{\sin^2 \theta + (\cos \theta - 1)^2\} B &= \cos \theta - 1 \\ 2(1 - \cos \theta)B &= \cos \theta - 1 \end{aligned}$$

従って $B = -\frac{1}{2}$ が得られますからこれを第 1 式に戻せば

$$(\cos \theta - 1)A - \frac{\sin \theta}{2} = 0 \quad \text{すなわち} \quad A = \frac{\sin \theta}{2(\cos \theta - 1)}$$

が分かります。

(2) 以上のように数列 $c_n = \frac{\sin \theta}{2(\cos \theta - 1)} \cos n\theta - \frac{1}{2} \sin n\theta$ は問題の漸化式を満たしています。すると、

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = \sin n\theta \\ c_{n+1} - c_n = \sin n\theta \end{cases}$$

を辺々引けば、

$$(a_{n+1} - c_{n+1}) - (a_n - c_n) = 0$$

が成り立っており、 $d_n = a_n - c_n$ と置けば数列 $\{d_n\}$ は定数列であることが分かります。

$$d_1 = a_1 - c_1 = -\frac{\sin \theta \cos \theta}{2(\cos \theta - 1)} + \frac{1}{2} \sin \theta = \frac{\sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}$$

に注意すれば $d_n = \frac{\sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}$ であって、従って

$$a_n = c_n + d_n = \frac{\sin \theta}{2(\cos \theta - 1)} \cos n\theta - \frac{1}{2} \sin n\theta + \frac{\sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}$$

が分かります。 □

発展演習 10 次の漸化式・初期条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ について：

$$5a_n a_{n+1} = a_n - a_{n+1}, \quad a_1 = 1$$

a_2, a_3 を求め、更に一般項を求めて下さい。

指定された以上に具体値を見てみても良いでしょう：

$$a_2 = \frac{1}{6}, \quad a_3 = \frac{1}{11}, \quad a_4 = \frac{1}{16}$$

どうやら $a_n = \frac{1}{5n-4}$ となっていそうですから、帰納法で示して仕舞えば終了です。が、ここは別のやり方で。漸化式を変形すると

$$(5a_n + 1)a_{n+1} = a_n \quad \text{従って} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{5a_n + 1}$$

ですが、初項が正であれば任意の項が正なので両辺逆数を取れば

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 5 + \frac{1}{a_n}$$

が分かり、数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ は初項 1、公差 5 の等差数列ですから

$$\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1)5 \quad \text{すなわち} \quad a_n = \frac{1}{5n-4} \quad (n \geq 1)$$

が分かります。 □

基本演習 11 (1) 三角関数の積和変換公式により $\cos(n+1)\theta \cos \theta, \sin(n+1)\theta \cos \theta$ をそれぞれ和に変換してください。

(2) θ を定数とするとき 2 つの数列 $\{\cos n\theta\}, \{\sin n\theta\}$ は同じ漸化式：

$$G_{n+2} - 2 \cos \theta G_{n+1} + G_n = 0 \tag{10.1}$$

を満たしていることを確認してください。

(3) 任意の定数 A, B に対して数列 $\{A \cos n\theta + B \sin n\theta\}$ は漸化式 (10.1) を満たすことを確認してください。

(4) $c \neq 0$ のとき 3 項間漸化式：

$$P_{n+2} + bP_{n+1} + cP_n = 0 \quad (10.2)$$

の特性方程式 $t^2 + bt + c = 0$ が非実数解をもつことと、漸化式 (10.2) が $Q_n = \frac{P_n}{\sqrt{c}^n}$ と置くことによって

$$Q_{n+2} - 2aQ_{n+1} + Q_n = 0 \quad (|a| < 1)$$

の形に変形できることは同値であることを示してください。

(5) 次の漸化式と初期条件を満たす数列の一般項を求めてください：

$$E_{n+2} - \sqrt{3}E_{n+1} + E_n = 0, \quad E_1 = \sqrt{3} + \frac{1}{2}, E_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$$

(6) 次の漸化式と初期条件を満たす数列の一般項を求めてください：

$$F_{n+2} + F_n = 0, \quad F_1 = 1, F_2 = -1.$$

(1)(2) 積和変換公式から

$$\cos(n+1)\theta \cos \theta = \frac{1}{2} \{ \cos(n+2)\theta + \cos n\theta \},$$

$$\sin(n+1)\theta \cos \theta = \frac{1}{2} \{ \sin(n+2)\theta + \sin n\theta \}$$

ですから、任意の θ に対して、 $\sin n\theta, \cos n\theta$ のいずれも同一の漸化式：

$$G_{n+2} - 2 \cos \theta G_{n+1} + G_n = 0$$

を満たしている事が分かります。

(3) 積和変換公式から

$$\begin{aligned} & A \cos(n+2)\theta + B \sin(n+2)\theta + A \cos n\theta + B \sin n\theta \\ &= A \{ \cos(n+2)\theta + \cos n\theta \} + B \{ \sin(n+2)\theta + \sin n\theta \} \\ &= 2 \{ A \cos(n+1)\theta + B \sin(n+1)\theta \} \cos \theta \end{aligned}$$

なので、確かに満たしています。

(4) 特性方程式が非実数解をもつ条件は $b^2 - 4c < 0$ であり、このとき特に $c > 0$ です。一方、 $c > 0$ のときに漸化式 (10.2) において $Q_n = \frac{P_n}{\sqrt{c}^n}$ と置くと、

$$\frac{P_{n+2}}{\sqrt{c}^{n+2}} + b \frac{P_{n+1}}{\sqrt{c}^{n+2}} + c \frac{P_n}{\sqrt{c}^{n+2}} = 0$$

$$\frac{P_{n+2}}{\sqrt{c}^{n+2}} + \frac{b}{\sqrt{c}} \frac{P_{n+1}}{\sqrt{c}^{n+1}} + \frac{P_n}{\sqrt{c}^n} = 0$$

$$Q_{n+2} + 2 \frac{b}{\sqrt{4c}} Q_{n+1} + Q_n = 0$$

と変形され、 $a = \frac{b}{\sqrt{4c}}$ ですから、 $|a| < 1$ であることは $b^2 < 4c$ と同値であり、題意は示されました。

(5) この漸化式は変形すると

$$E_{n+2} - 2 \frac{\sqrt{3}}{2} E_{n+1} + E_n = 0$$

であり、 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となるような θ は例えば $\frac{\pi}{6}$ があります。すると (3) の結果から任意の定数 A, B に対して数列 $\{A \cos \frac{n\pi}{6} + B \sin \frac{n\pi}{6}\}$ はこの漸化式を満たしていますから、あとは与えられた初期条件を満たすように定数 A, B を決定します。

まず $n = 1$ のときの条件から

$$\sqrt{3} + \frac{1}{2} = A \cos \frac{\pi}{6} + B \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} A + \frac{1}{2} B$$

であり、 $n = 2$ での条件から

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = A \cos \frac{\pi}{3} + B \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} A + \frac{\sqrt{3}}{2} B$$

が分かりますからこの連立方程式を解けば $A = 2, B = 1$ が得られます。以上から求める一般項は

$$E_n = 2 \cos \frac{n\pi}{6} + \sin \frac{n\pi}{6}$$

です。

(6) この漸化式は

$$F_{n+2} - 2 \cdot 0 \cdot F_{n+1} + F_n = 0$$

と読めますから、任意の定数 A, B に対して $\{A \cos \frac{n\pi}{2} + B \sin \frac{n\pi}{2}\}$ はこの漸化式を満たしています。あとは与えられた初期条件を満たすように定数 A, B を決定します。

まず $n = 1$ のときの条件から

$$1 = A \cos \frac{\pi}{2} + B \sin \frac{\pi}{2} = B$$

であり、 $n = 2$ での条件から

$$-1 = A \cos \pi + B \sin \pi = -A$$

が分かりますからこの連立方程式を解けば $A = B = 1$ が得られます。

以上から求める一般項は

$$F_n = \cos \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2}$$

です。

□