微分方程式・漸化式・行列のべき乗

10.1　同次であって特性方程式が２実数解の場合

10.1.1　微分方程式

例題 10.1 微分方程式：

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$$

の一般解を求めて下さい。

この方程式の特性方程式は $t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3) = 0$ なので、

$$5 = 2 + 3, \quad 6 = 2 \cdot 3$$

であって、方程式は次のように２通りに変形される：

$$\begin{cases} f''(x) - 2f'(x) = 3\{f'(x) - 2f(x)\} \\ f''(x) - 3f'(x) = 2\{f'(x) - 3f(x)\} \end{cases}$$

ここで $f'(x) - 2f(x) = g(x),\ f'(x) - 3f(x) = h(x)$ と置けば、

$$\begin{cases} g'(x) = 3g(x) \\ h'(x) = 2h(x) \end{cases}$$

なので、これは簡単に解けて $g(x) = \mathrm{e}^{3x}G,\ h(x) = \mathrm{e}^{2x}H$ が一般解です（G, H は任意の定数)。従って元の関数 $f(x)$ による記述にもどせば、

$$\begin{cases} f'(x) - 2f(x) = \mathrm{e}^{3x}G \\ f'(x) - 3f(x) = \mathrm{e}^{2x}H \end{cases}$$

であり、第１式から第２式を引けば、

$$f(x) = \mathrm{e}^{3x}G - \mathrm{e}^{2x}H$$

が得られ、これが一般解です（G, H は任意の定数)。

10.1.2　漸化式

例題 10.2 漸化式：

$$F_{n+2} - 5F_{n+1} + 6F_n = 0$$

の一般解を求めて下さい。

この漸化式の特性方程式は $t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3) = 0$ なので、

$$5 = 2 + 3, \quad 6 = 2 \cdot 3$$

であって、漸化式は次のように２通りに変形される：

$$\begin{cases} F_{n+2} - 2F_{n+1} = 3\{F_{n+1} - 2F_n\} \\ F_{n+2} - 3F_{n+1} = 2\{F_{n+1} - 3F_n\} \end{cases}$$

ここで $F_{n+1} - 2F_n = G_n,\ F_{n+1} - 3F_n = H_n$ と置けば、

$$\begin{cases} G_{n+1} = 3G_n \\ H_{n+1} = 2H_n \end{cases}$$

なので、これは簡単に解けて $G_n = 3^n G, \quad H_n = 2^n H$ が一般解です（G, H は任意の定数)。従って元の数列 F_n による記述にもどせば、

$$\begin{cases} F_{n+1} - 2F_n = 3^n G \\ F_{n+1} - 3F_n = 2^n H \end{cases}$$

であり、第１式から第２式を引けば、

$$F_n = 3^n G - 2^n H$$

が得られ、これが一般解です（G, H は任意の定数)。

10.2　同次であって特性方程式が重解の場合

10.2.1　微分方程式

例題 10.3 微分方程式：

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 0$$

の一般解を求めて下さい。

この方程式の特性方程式は $t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0$ なので、方程式は次のように変形されます：

$$f''(x) - 2f'(x) = 2\left\{f'(x) - 2f(x)\right\}.$$

ここで $f'(x) - 2f(x) = g(x)$ と置けば、

$$g'(x) = 2g(x)$$

なので、これは簡単に解けて $g(x) = G\mathrm{e}^{2x}$ が一般解です（G は任意の定数）。従って元の関数 $f(x)$ による記述にもどせば、

$$f'(x) - 2f(x) = G\mathrm{e}^{2x}$$

であり、両辺に e^{-2x} を掛ければ

$$\mathrm{e}^{-2x}f'(x) - 2\mathrm{e}^{-2x}f(x) = G$$

が分かります。ここで $\mathrm{e}^{-2x}f(x) = h(x)$ と置けば

$$h'(x) = G$$

なのでこれは簡単に解けて

$$\begin{aligned} h(x) &= Gx + H \\ \mathrm{e}^{-2x}f(x) &= Gx + H \\ f(x) &= Gx\mathrm{e}^{2x} + H\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

が得られ、これが一般解です（G, H は任意の定数）。

10.2.2　漸化式

例題 10.4 漸化式：

$$F_{n+2} - 4F_{n+1} + 4F_n = 0$$

の一般解を求めて下さい。

この漸化式の特性方程式は $t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0$ なので、漸化式は次のように変形されます：

$$F_{n+2} - 2F_{n+1} = 2\left\{F_{n+1} - 2F_n\right\}.$$

ここで $F_{n+1} - 2F_n = G_n$ と置けば、

$$G_{n+1} = 2G_n$$

なので、これは簡単に解けて $G_n = G\,2^n$ が一般解です（G は任意の定数）。　従って元の数列 F_n による記述にもどせば、

$$F_{n+1} - 2F_n = G\,2^n$$

であり、両辺に $2^{-(n+1)}$ を掛ければ

$$\frac{F_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{F_n}{2^n} = \tilde{G}$$

が分かります。ここで $\frac{F_n}{2^n} = H_n$ と置けば

$$H_{n+1} - H_n = \tilde{G}$$

なのでこれは簡単に解けて

$$\begin{aligned} H_n &= \tilde{G}n + H \\ \frac{F_n}{2^n} &= \tilde{G}n + H \\ F_n &= \tilde{G}\,n2^n + H\,2^n \end{aligned}$$

が得られ、これが一般解です（$\tilde{G}, H$ は任意の定数）。

10.3　行列のべき乗

基本演習 1 次の行列に対して Hamilton-Cayley の定理を使って n 乗を求めて下さい。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$　　(2) $C = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

(1) Hamilton-Cayley の定理によれば

$$O = A^2 - 5A + 6E = (A-2E)(A-3E) = (A-3E)(A-2E)$$

が成り立っており、これは次の２通りに変形されます：

$$\begin{cases} A(A-2E) = 3(A-2E) & \cdots (1) \\ A(A-3E) = 2(A-3E) & \cdots (2) \end{cases}$$

(1) から

$$\begin{aligned} A^n(A-2E) &= 3^n(A-2E) \\ A^{n+1} - 2A^n &= 3^n(A-2E) \cdots (3) \end{aligned}$$

であり、(2) から

$$\begin{aligned} A^n(A-3E) &= 2^n(A-3E) \\ A^{n+1} - 3A^n &= 2^n(A-3E) \cdots (4) \end{aligned}$$

が得られますから、(3)-(4) として

$$\begin{aligned} A^n &= 3^n(A-2E) - 2^n(A-3E) \\ &= 3^n \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2^n \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3^n + 2^{n+1} & -2\cdot 3^n + 2^{n+1} \\ 3^n - 2^n & 2\cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が分かります。

(2) Hamilton-Cayley の定理から

$$O = C^2 - 4C + 4E = (C-2E)^2$$

が得られ、

$$C(C-2E) = 2(C-2E)$$

と変形されます。従って

$$\begin{aligned} C^n(C-2E) &= 2^n(C-2E) \\ C^{n+1} - 2C^n &= 2^n(C-2E) \\ \frac{C^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{C^n}{2^n} &= \frac{1}{2}(C-2E) \end{aligned}$$

ですから、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{C^j}{2^j} - \frac{C^{j-1}}{2^{j-1}} \right) &= \frac{n}{2}(C-2E) \\ \frac{C^n}{2^n} - E &= \frac{n}{2}(C-2E) \\ C^n &= n2^{n-1}(C-2E) + 2^nE \\ &= n2^{n-1}\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n-1}\begin{pmatrix} -3n+2 & 9n \\ -n & 3n+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

です。 □

Exercise

基本演習 2 次の行列に対して Hamilton-Cayley の定理を使って各成分の満たす３項間漸化式を導き、これを解いて行列の n 乗を求めて下さい。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

基本演習 3 次の行列に対して Hamilton-Cayley の定理を使って n 乗を求めて下さい。

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

基本演習 4 次の各漸化式の一般解を求めて下さい（$n \geq 0$)。

(1) $A_{n+2} - 3A_{n+1} + 2A_n = 0$ (2) $A_{n+2} - 3A_{n+1} + 2A_n = 2n + 1$

(3) $A_{n+2} - 3A_{n+1} + 2A_n = 2^n$

発展演習 5 次の漸化式について以下の問いに答えて下さい。

$$G_{n+2} + G_{n+1} - 6G_n = 0 \quad (n \geq 0)$$

(1) 特性方程式が $t^2 + t - 6 = (t+3)(t-2) = 0$ なので $G_{n+2} + 3G_{n+1} = 2(G_{n+1} + 3G_n)$ と変形されますが、ここで $G_{n+1} + 3G_n = H_n$ と置いて H_n の満たす漸化式を解いて一般解を求めて下さい。

(2) その結果を使って非同次漸化式：$G_{n+1} + 3G_n = H_n$ において両辺を $(-3)^{n+1}$ で割って、$J_n = \frac{G_n}{(-3)^n}$ と置く事によって J_n の漸化式を求め、それを解いて一般解 J_n、更には G_n を求めて下さい。

(3) (2) とは別のやり方で非同次方程式：$G_{n+1} + 3G_n = H_n$ を考えてみます。まず対応した同次式の一般解を求めて下さい。次に非同次式の解を一つ何でも良いので求めて下さい。これによって非同次漸化式の一般解 G_n を求めて下さい。

発展演習 6 次の漸化式について以下の問いに答えて下さい。

$$F_{n+3} - 4F_{n+2} + 5F_{n+1} - 2F_n = 0 \quad (n \geq 0)$$

(1) 特性方程式は $t = 1$ を解としてもつことを示して下さい。

(2) 従って漸化式は

$$(F_{n+3} - F_{n+2}) - 3(F_{n+2} - F_{n+1}) + 2(F_{n+1} - F_n) = 0$$

と変形することが出来ますが、これを使って一般解を求めて下さい。

発展演習 7 次の漸化式・初期条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めて下さい。

$$(2n+2)a_n - na_{n+1} - 3n - 6 = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \qquad a_1 = 4.$$

基本演習 8 θ は $\cos\theta \neq 1, \sin\theta \neq 0$ であるような実数であるとします。次の漸化式・初期条件を満たす数列 $\{a_n\}$ について、以下の問いに答えて下さい。

$$a_{n+1} - a_n = \sin n\theta, \quad a_1 = 0.$$

(1) 数列 $c_n = A\cos n\theta + B\sin n\theta$ が同じ漸化式を満たすような（漸化式のみであって、初期条件は満たす必要はありません）実数の組 (A, B) を１組見つけて下さい。

(2) $a_n - c_n$ を考える事によって数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めて下さい。

発展演習 9 次の漸化式・初期条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ について：

$$5a_na_{n+1} = a_n - a_{n+1}, \quad a_1 = 1$$

a_2, a_3 を求め、更に一般項を求めて下さい。

基本演習 10 (1) 三角関数の積和変換公式により $\cos(n+1)\theta\cos\theta, \sin(n+1)\theta\cos\theta$ をそれぞれ和に変換してください。

(2) θ を定数とするとき 2 つの数列 $\{\cos n\theta\}$, $\{\sin n\theta\}$ は同じ漸化式：

$$G_{n+2} - 2\cos\theta G_{n+1} + G_n = 0 \tag{10.1}$$

を満たしていることを確認してください。

(3) 任意の定数 A, B に対して数列 $\{A\cos n\theta + B\sin n\theta\}$ は漸化式 (10.1) を満たすことを確認してください。

(4) $c \neq 0$ のとき 3 項間漸化式：

$$P_{n+2} + bP_{n+1} + cP_n = 0 \tag{10.2}$$

の特性方程式 $t^2 + bt + c = 0$ が非実数解をもつことと、漸化式 (10.2) が $Q_n = \frac{P_n}{\sqrt{c}^n}$ と置くことによって

$$Q_{n+2} - 2aQ_{n+1} + Q_n = 0 \quad (|a| < 1)$$

の形に変形できることは同値であることを示してください。

(5) 次の漸化式と初期条件を満たす数列の一般項を求めてください：

$$E_{n+2} - \sqrt{3}E_{n+1} + E_n = 0, \quad E_1 = \sqrt{3} + \frac{1}{2}, E_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$$

(6) 次の漸化式と初期条件を満たす数列の一般項を求めてください：

$$F_{n+2} + F_n = 0, \quad F_1 = 1, F_2 = -1.$$