

直交行列と対称行列

1 直交行列

定義 1.1 行列 M が ${}^tM = M^{-1}$ を満たすとき、 M は直交行列であると言います。

1.1 直交行列の性質

■ 2つの直交行列 M, N の積はまた直交行列になります：

$${}^t(MN) = {}^tN {}^tM = N^{-1} M^{-1} = (MN)^{-1}.$$

しかし、直交行列の和は直交行列とは限りません。

■ 当然直交行列は正則ですが、その行列式は以下の計算が示す様に ± 1 のいずれかです。

$$|M|^2 = |M||M| = |{}^tM||M| = |M^{-1}||M| = |M^{-1}M| = |E| = 1$$

■ また、直交行列の表現する一次変換は、ベクトルの大きさを変えません：

$$\|Ma\|^2 = Ma \cdot Ma = {}^t(Ma)Ma = {}^t_a {}^tMMa = {}^t_a a = a \cdot a = \|a\|^2$$

更に言えば、同様の計算によって、内積も不変である事が分かります：

$$Ma \cdot Mb = {}^t(Ma)Mb = {}^t_a {}^tMMb = {}^t_a b = a \cdot b.$$

と云うことは、ベクトルの大きさも変えず、内積も変えないわけですからこの一次変換は2つのベクトルの成す角度も変えない事が分かります。

1.2 直交行列の例

2つのベクトルの内積を変えない変換と云う事ですが、例えばどう云うものだろうと考えてみると、回転変換は正にそうです。2次元の角度 θ の回転変換の表現行列は $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ですが、確かにこれは直交行列になっていますね。

また、変換の様子を思い浮かべてみれば分かる通り、ある原点を通る直線に関する折り返しもそうです（演習問題参照）。

1.3 直交行列の固有値

p が直交行列 M の固有値であって対応する固有ベクトルが w であるならば、内積の不変性から

$$p^2 w \cdot w = (pw) \cdot (pw) = (Mw) \cdot (Mw) = w \cdot w$$

となって、 w はゼロベクトルではないので $p^2 = 1$ が分かります。従って直交行列の固有値は、存在するならば ± 1 のいずれか（あるいは両方）です。

1.4 直交行列の成分

$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ を n 次の直交行列とします（ $a_1, \dots, a_n$ は n 本の n 次元縦ベクトルです）。このとき、 ${}^tMM = E$ から、

$${}^t \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = E$$

$$\begin{pmatrix} {}^t a_1 \\ {}^t a_2 \\ \vdots \\ {}^t a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \cdot a_1 & a_1 \cdot a_2 & \cdots & a_1 \cdot a_n \\ a_2 \cdot a_1 & a_2 \cdot a_2 & \cdots & a_2 \cdot a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n \cdot a_1 & a_n \cdot a_2 & \cdots & a_n \cdot a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

となって、

$$a_i \cdot a_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

が分かります。つまり、 n 本のベクトル $a_1, a_2, \dots, a_n$ はすべて単位ベクトルであり、かつ、その内の異なる2本は互いに直交していることが行列 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ が直交行列であるための必要十分条件です。

この内積の様に、2つの（自然数の）添字のついたもので、 $i = j$ のとき1になり $i \neq j$ のとき0になるようなものを特に記号 δ_{ij} で表して Kronecker Delta と言います：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

添字 i, j の取りうる範囲はケースバイケースですがそれがどうであっても同じ記号を使います。これは単位行列を表していると考えても良いでしょう。

2 対称行列

定義 2.1 行列 M が ${}^tM = M$ を満たすとき、 M は対称行列であると言います。また、 ${}^tM = -M$ を満たす時は、 M は交代行列 (aka 歪対称行列・反対称行列) であると言います。

2.1 対称行列の性質

■対称行列の和は対称行列です：

$${}^t(M + N) = {}^tM + {}^tN = M + N.$$

対称行列の積は対称行列になるとは限りません (交代行列についても同様です)。

■任意の行列 A に対して tAA は対称行列になります。

■任意の正方行列 A に対して、 $\frac{A+{}^tA}{2}$ は対称行列であり、 $\frac{A-{}^tA}{2}$ は交代行列です。従って、任意の正方行列は対称行列と交代行列の和で書けることになります：

$$A = \frac{A+{}^tA}{2} + \frac{A-{}^tA}{2}.$$

■また、ベクトルの内積に関しては、 M が対称行列なら

$$\mathbb{w} \cdot (M\mathbb{w}) = {}^t\mathbb{w}M\mathbb{w} = {}^t\mathbb{w}{}^tM\mathbb{w} = {}^t(M\mathbb{w})\mathbb{w} = (M\mathbb{w}) \cdot \mathbb{w}$$

となっています。

2.2 対称行列の固有値・固有ベクトル

2.2.1 固有値

$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ を 2 次の正方行列としたとき、その固有方程式は

$$0 = |M - xE| = \begin{vmatrix} m_{11} - x & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - x \end{vmatrix} = x^2 - (m_{11} + m_{22})x + m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$$

ですから、もしも M が対称行列ならば $m_{12} = m_{21}$ であって、その判別式は

$$(m_{11} + m_{22})^2 - 4(m_{11}m_{22} - m_{12}^2) = (m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}^2 \geq 0$$

となり実固有値を (重複度も込めて) 2 つ必ずもつ事が分かります。要するに、対称行列に関しては『(実) 固有値がない』と云う事はあり得ないわけです (3 次対称行列ではどうでしょうか？考えてみて下さい)。

2.2.2 固有ベクトル

また、2 つのベクトル $\mathbb{v}_p, \mathbb{v}_r$ が対称行列 M のそれぞれ異なる固有値 p, r に対応した固有ベクトルであるならば、

$$\begin{aligned} p(\mathbb{v}_p \cdot \mathbb{v}_r) \\ &= (p\mathbb{v}_p) \cdot \mathbb{v}_r = (M\mathbb{v}_p) \cdot \mathbb{v}_r = {}^t\mathbb{v}_p{}^tM\mathbb{v}_r = {}^t\mathbb{v}_p(M\mathbb{v}_r) = {}^t\mathbb{v}_p(r\mathbb{v}_r) = r(\mathbb{v}_p \cdot \mathbb{v}_r) \end{aligned}$$

となり、 $p \neq r$ である事から $\mathbb{v}_p \cdot \mathbb{v}_r = 0$ である事、すなわち、異なる固有値に対応した固有ベクトル同士は垂直である事が分かります。

2.3 2 次対称行列の対角化

以下 $M = (m_{ij})$ を 2 次の対称行列とします。

2.3.1 固有値が重複している場合

この場合は先に判別式を見た様に $m_{11} = m_{22}$, $m_{12} = m_{21} = 0$ となっているはずで、これは M が単位行列の定数倍である事、従って特に既に対角化されている事を意味しますから、この場合は対角化を考える必要はありません。

2.3.2 相異なる 2 つの固有値をもつ場合

2 つの固有値を p, r 、それぞれに対応した固有ベクトルを $\mathbb{v}_p, \mathbb{v}_r$ とします。

このとき $Q = \begin{pmatrix} \mathbb{v}_p & \mathbb{v}_r \end{pmatrix}$ とおけば、

$$MQ = M \begin{pmatrix} \mathbb{v}_p & \mathbb{v}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\mathbb{v}_p & M\mathbb{v}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\mathbb{v}_p & r\mathbb{v}_r \end{pmatrix}$$

ですが、 $v_p = Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ などに注意すれば

$$MQ = \begin{pmatrix} pQ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & rQ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} & Q \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

となって M を対角化する事が出来ます。

ここで固有ベクトルを並べて作った行列 Q に注目すると、対称行列の異なる固有値に対応する固有ベクトル同士は垂直であったわけですからこの v_p, v_r も垂直です。

そこで元々 v_p, v_r を単位ベクトルである様に選んでおけば（定数倍するだけです）からいつでも可能です）、この 2 本は互いに直交する単位ベクトルですから、今日最初にお話した様に行列 Q は直交行列になっています（従って $Q^{-1} = {}^tQ$ です）。

2.4 行列のべき乗

正方行列 M が固有ベクトルを並べてできる正則行列 P によって

$$P^{-1}MP = D$$

と対角化できる場合、

$$M = PDP^{-1}$$

$$M^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$$

となり、対角行列

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_m \end{pmatrix}$$

のべき乗は

$$D^n = \begin{pmatrix} a_1^n & & 0 \\ & a_2^n & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_m^n \end{pmatrix}$$

と云う風に簡単に計算されるので、右辺が計算できることになり、結果的に M^n を求めることができます。単にべき乗を求めるだけであれば、正則行列 P は直交行列である必要は全くありません。しかし、2 次形式の標準形を求める場合には（ M は対称行列です）直交行列を使って対角化しなければなりません。

2.5 Gram-Schmidt の直交化

3 次以上の対称行列を直交行列を使って対角化するためには得られた固有ベクトルの組を互いに直交するものに置き換えなければなりません。

例えば行列 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は $-3, 3$ で、固有ベクトルは

$$\text{固有値 } 3: \quad v_{31} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{32} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{固有値 } -3: \quad v_{-3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ですが、 v_{31} と v_{32} が直交していないので、このまま（長さを 1 にしたうえで）並べても直交行列にはなりません。

固有値 3 に関する固有ベクトルは、この 2 つのベクトルの一次結合 $av_{31} + bv_{32}$ の中から選ぶならばどれでも良いわけですから、互いに直交する 2 本を選びます。

取り敢えず v_{31} は使う事にして、これと $av_{31} + bv_{32}$ が直交する様に定数 a, b を決定してやります。すると

$$0 = v_{31} \cdot (av_{31} + bv_{32}) = 2a + b$$

であれば良いわけですから、 $a = -1, b = 2$ で考えれば

$$-v_{31} + 2v_{32} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

が得られます。これによって互いに直交する固有ベクトルの組：

$$v_{31} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{33} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_{-3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られたので後はそれぞれを長さ 1 にして並べれば直交行列ができます。

Exercise

基本演習 1 対称行列 $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ を直交行列によって対角化し M^n を求めて下さい。

基本演習 2 次の各対称行列を直交行列によって対角化して下さい。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

基本演習 3 次の 3 本の 4 次元ベクトルについて以下の問いに答えて下さい：

$$a = {}^t(1 \quad -1 \quad 2 \quad 5), b = {}^t(2 \quad -3 \quad 3 \quad 5), c = {}^t(3 \quad 2 \quad -1 \quad 4).$$

(1) $b + ka$ が a と垂直になる様な定数 k を求めて下さい。

(2) 上で求めた k を使って $d = b + ka$ とします。このとき、 $c + pa + rd$ が a, d の両方と垂直である様に定数 p, r を求めて下さい。

基本演習 4 (1) 平面内の原点を通る直線に関する折り返し変換の表現行列は直交行列になる事を示して下さい。

(2) 原点を通らない直線に関する折り返しは、そもそも 1 次変換ではありませんが、その理由を端的に述べて下さい。

基本演習 5 2 次の直交行列は、回転行列であるか、又は回転行列と x -軸に関する折り返し変換行列の積のいずれかである事を示して下さい。

発展演習 6 3 次対称行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えて下さい。

ただし、 a, b, c は全て異なり、いずれも 0 でないとしします。

(1) $f(x) = |M - xE|$ を求め、さらに $f(x)$ を $f'(x)$ で割った余り $h(x)$ を求めて下さい。

(2) $f'(x) = 0$ の解 α, β を求め、(1) で求めた $h(x)$ を上手く使って $f(\alpha)f(\beta)$ を求めて下さい。

(3) AM-GM 不等式を使って $f(\alpha)f(\beta) < 0$ である事を示して下さい。

(4) 以上の結果と 3 次関数 $y = f(x)$ のグラフの形に関する考察から、 M は 3 つの異なる実固有値をもつ事を示して下さい。

発展演習 7 (1) 行列式の基本的な性質を使って、奇数次の交代行列の行列式は 0 である事を証明して下さい。

(2) 2 次の交代行列式は非負である事を証明して下さい。

(3) 4 次の交代行列式は $abc \neq 0$ なら

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & f \\ -b & -d & 0 & g \\ -c & -f & -g & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} = \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -abc & 0 & bcd & bcf \\ -abc & -acd & 0 & acg \\ -abc & -abf & -abg & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \times bc \\ (3) \times ac \\ (4) \times ab \end{matrix}$$

と変形出来る事などを使って計算し、常に非負である事を証明して下さい。

(4) 交代行列の（実）固有値は 0 のみである事を証明して下さい。

Exercise 解答例

基本演習 1 対称行列 $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ を直交行列によって対角化し M^n を求めて下さい。

まず固有値を求めます。固有方程式は

$$|M - tE| = (2 - t)(-1 - t) - 4 = t^2 - t - 6 = (t - 3)(t + 2)$$

なのでその実数解すなわち M の固有値は $-2, 3$ です。

次に各固有値に対応した固有ベクトルを求めます。

まず固有値 -2 に関しては、 $M\mathbf{x} = -2\mathbf{x}$ となるベクトル $\mathbf{x}$ を求めれば良いわけですが、これは連立方程式：

$$\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

を解けばよく、 $y = -2x$ ですから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となって、求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ です。

次に固有値 3 に関しては、 $M\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$ となるベクトル $\mathbf{x}$ を求めれば良いわけですが、これは連立方程式：

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

を解けばよく、 $x = 2y$ ですから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となって、求める固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

そこで、長さ 1 の固有ベクトルを並べて得られる行列を P と置けば：

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

P は直交行列であって、

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と M を対角化する事が出来ます。また、

$$M = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

から M^n は

$$\begin{aligned} M^n &= P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & -2(-2)^n \\ 2 \cdot 3^n & 3^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} (-2)^n + 4 \cdot 3^n & -2(-2)^n + 2 \cdot 3^n \\ -2(-2)^n + 2 \cdot 3^n & 4(-2)^n + 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求められます。

基本演習 2 次の各対称行列を直交行列によって対角化して下さい。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

何れも似た様な問題であり、真に新しい困難は同じ固有ベクトルで直交するものを選ぶ部分にありますからそこに重点を置いて他は省略気味に書きます。

(3) 固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 1-x & -1 & 1 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = -(x+1)(x-2)^2$$

ですから固有値は $-1, 2$ であり、それぞれに対応した固有ベクトルを求めると、

$$\text{固有値 } -1: \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{固有値 } 2: \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となっており、 p_1 は p_2, p_3 の双方と直交していますが p_2 と p_3 は直交していません。

そこで、 $p_4 = ap_2 + bp_3$ が p_2 と直交する様に (p_1 と直交する事は明らか) 定数 a, b を決めようと思いますが、

$$0 = p_2 \cdot (ap_2 + bp_3) = 2a + b$$

ですから、例えば $a = -1, b = 2$ とすれば、

$$p_4 = -p_2 + 2p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られます。以上から、 p_1, p_2, p_4 を長さ 1 にして並べて出来る行列 P は直交行列になります：

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

更にこのとき、元の行列を M とすれば、

$$\begin{aligned} MP &= M \left(\frac{1}{\sqrt{3}} p_1 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} p_2 \quad \frac{1}{\sqrt{6}} p_4 \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} M p_1 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} M p_2 \quad \frac{1}{\sqrt{6}} M p_4 \right) \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} p_1 \quad \frac{2}{\sqrt{2}} p_2 \quad \frac{2}{\sqrt{6}} p_4 \right) \\ &= \begin{pmatrix} -P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & 2P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 2P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となって M を P によって対角化する事が出来ます。

□

基本演習 3 次の3本の4次元ベクトルについて以下の問いに答えて下さい：

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(1) $b + ka$ が a と垂直になる様な定数 k を求めて下さい。

(2) 上で求めた k を使って $d = b + ka$ とします。このとき、 $c + pa + rd$ が a, d の両方と垂直である様に定数 p, r を求めて下さい。

(1) まず内積を計算しておく、

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 36, & b \cdot c &= 17, & c \cdot a &= 19, \\ a \cdot a &= 31, & b \cdot b &= 47, & c \cdot c &= 30 \end{aligned}$$

ですから、

$$a \cdot (b + ka) = 36 + 31k = 0$$

から $k = -\frac{36}{31}$ が分かります。

(2) $d = b + ka$ とすると、

$$c + pa + rd = c + pa + r(b + ka) = (p + rk)a + rb + c$$

なので、

$$0 = a \cdot \{(p + rk)a + rb + c\} = 31(p + rk) + 36r + 19 = 31p + 19$$

から $p = -\frac{19}{31}$ です。また、

$$\begin{aligned} 0 &= d \cdot \{(p + rk)a + rb + c\} \\ &= rd \cdot b + d \cdot c \\ &= r(b + ka) \cdot b + (b + ka) \cdot c \\ &= 47r + 36kr + 17 + 19k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 31 \cdot 47r - 36^2r + 31 \cdot 17 - 19 \cdot 36 \\ &= 161r - 157 \end{aligned}$$

から、 $r = \frac{157}{161}$ である事も分かります。

□

基本演習 4 (1) 平面内の原点を通る直線に関する折り返し変換の表現行列は直交行列になる事を示して下さい。

(2) 原点を通らない直線に関する折り返しは、そもそも1次変換ではありませんが、その理由を端的に述べて下さい。

(2) 1次変換は原点を必ず原点に移しますが、原点を通らない直線に関する折り返し変換は原点を原点でない点に移します。

基本演習 5 2次の直交行列は、回転行列であるか、又は回転行列と x -軸に関する折り返し変換行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ の積のいずれかである事を示して下さい。

2次正方行列 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が直交行列であるならば、2つのベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

は互いに直交する単位ベクトルですが、まず $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ に関して、これが単位ベクトルであると云う事は点 (a, c) は単位円周上にありますから $a = \cos \theta, c = \sin \theta$ となる角度 θ が存在します。

また、単位ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ に直交する単位ベクトル $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ の可能性は $\pm \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$ のどちらかしかなく、従って行列 M は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

のいずれかであることが分かります。前者は回転行列ですが、後者は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ですから、確かに題意は成り立っています。

□

発展演習 6 3 次対称行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えて下さい。

ただし、 a, b, c はいずれも 0 ではなく、また全て異なる数であるものとします。

(1) $f(x) = |M - xE|$ を求め、さらに $f(x)$ を $f'(x)$ で割った余り $h(x)$ を求めて下さい。

(2) $f'(x) = 0$ の解 α, β を求め、(1) で求めた $h(x)$ を上手く使って $f(\alpha)f(\beta)$ を求めて下さい。

(3) AM-GM 不等式を使って $f(\alpha)f(\beta) < 0$ である事を示して下さい。

(4) 以上の結果と 3 次関数 $y = f(x)$ のグラフの形に関する考察から、 M は 3 つの異なる実固有値をもつ事を示して下さい。

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & a & b \\ a & 1-x & c \\ b & c & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)^3 + 2abc - a^2(1-x) - b^2(1-x) - c^2(1-x) \\ &= 1 - 3x + 3x^2 - x^3 + 2abc + (a^2 + b^2 + c^2)x - (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= -x^3 + 3x^2 + (a^2 + b^2 + c^2 - 3)x + 1 - a^2 - b^2 - c^2 \\ f'(x) &= -3x^2 + 6x + a^2 + b^2 + c^2 - 3 \end{aligned}$$

ですので、

$$\begin{array}{r} -3x^2 + 6x + a^2 + b^2 + c^2 - 3 \left| \begin{array}{r} \frac{1}{3}x \quad -\frac{1}{3} \\ -x^3 + 3x^2 \quad + (a^2 + b^2 + c^2 - 3)x \quad + 1 - a^2 - b^2 - c^2 - 2abc \\ -x^3 + 2x^2 \quad + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 - 3)x \\ \hline x^2 \quad + \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2 - 3)x \quad + 1 - a^2 - b^2 - c^2 - 2abc \\ x^2 \quad \quad \quad -2x \quad -\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 - 3) \\ \hline \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)x \quad -\frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - 2abc \end{array} \right. \end{array}$$

から、

$$h(x) = \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)(x - 1) - 2abc$$

が分かります。

(2)

$$0 = -3x^2 + 6x + a^2 + b^2 + c^2 - 3 = a^2 + b^2 + c^2 - 3(x - 1)^2$$

によれば、 $f'(x) = 0$ となるのは $x = 1 \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$ のときであり、最初の条件からこれは異なる 2 つの実数です。

従って (1) の結果から、 $f(\alpha) = h(\alpha), f(\beta) = h(\beta)$ なので

$$\begin{aligned} f(\alpha)f(\beta) &= 2 \left\{ \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} - abc \right\} \cdot 2 \left\{ - \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} - abc \right\} \\ &= 4 \left\{ a^2 b^2 c^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \right)^3 \right\} \end{aligned}$$

となります。

(3) AM-GM 不等式に依れば

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} &\geq \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \\ \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \right)^3 &\geq a^2 b^2 c^2 \quad \text{すなわち} \quad 0 \geq a^2 b^2 c^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \right)^3 \end{aligned}$$

ですが、等号が成り立つのは $a^2 = b^2 = c^2$ の場合であり、このとき a, b, c は全て絶対値が等しい数であり、従ってこのうち少なくとも 2 つは等しくなければならず、これは最初の仮定に反しますので等号は成り立たない事が分かります。

以上から $f(\alpha)f(\beta) < 0$ です。



(4) $f(x)$ は x^3 の係数が負の 3 次関数であって微分が 0 となる点が 2 つありますから、 $y = f(x)$ のグラフは大体次のようになりますが、その微分が 0 となる 2 点での $f(x)$ の値は (3) で見た様に正と負になっており、これはグラフが 3 点で x -軸と交わる事を意味しており、従って $f(x) = 0$ すなわち M の固有方程式は 3 つの異なる実数解 (実固有値) をもちます。 $\square$

発展演習 7 (1) 行列式の基本的な性質を使って、奇数次の交代行列の行列式は 0 である事を証明して下さい。

(2) 2 次の交代行列式は非負である事を証明して下さい。

(3) 4 次の交代行列式は $abc \neq 0$ なら

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & f \\ -b & -d & 0 & g \\ -c & -f & -g & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} = \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -abc & 0 & bcd & bcf \\ -abc & -acd & 0 & acg \\ -abc & -abf & -abg & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \times bc \\ (3) \times ac \\ (4) \times ab \end{matrix}$$

と変形出来る事などを使って計算し、常に非負である事を証明して下さい。

(4) 交代行列の（実）固有値は 0 のみである事を証明して下さい。

(1) 行列を転置してもその行列式は変わりませんし、行列式は各列ごとの線形性もちますから、 M が n 次正方行列なら

$$|{}^t M| = |M|, \quad |kM| = k^n |M|$$

が成り立っています。従って M が奇数次の交代行列なら

$$|M| = |{}^t M| = |-M| = (-1)^n |M| = -|M|$$

となって $|M| = 0$ である事が分かります。

(2) 2 次の交代行列式は明らかに

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a^2 \geq 0$$

となっており、非負です。

(3) 4 次の交代行列は一般に

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & f \\ -b & -d & 0 & g \\ -c & -f & -g & 0 \end{pmatrix}$$

ですが、 $abc \neq 0$ ならば、

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & f \\ -b & -d & 0 & g \\ -c & -f & -g & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} = \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -abc & 0 & bcd & bcf \\ -abc & -acd & 0 & acg \\ -abc & -abf & -abg & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \times bc \\ (3) \times ac \\ (4) \times ab \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & cd & bf \\ 1 & -cd & 0 & ag \\ 1 & -bf & -ag & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & cd & bf \\ 0 & -cd & -cd & ag - bf \\ 0 & -bf & -ag - cd & -bf \end{vmatrix} \begin{matrix} (5) \\ (6) \\ (7) - (6) \\ (8) - (6) \end{matrix}$$

と変形出来る事に注意すれば、余因子展開して

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -cd & -cd & ag - bf \\ -bf & -ag - cd & -bf \end{vmatrix} \begin{matrix} (9) \\ (10) \\ (11) \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -cd & 0 & ag - bf \\ -bf & -ag + bf - cd & -bf \end{vmatrix} \begin{matrix} (9) \\ (10) - (9) \\ (11) \end{matrix}$$

$$= (ag - bf + cd) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -cd & ag - bf \end{vmatrix}$$

$$= (ag - bf + cd)^2$$

$$\geq 0$$

となってやはり 4 次の交代行列式も非負です ($abc = 0$ の場合は省きましたが、計算は簡単になりますのでそれぞれ計算してみてください)。

一般に偶数次の交代行列式は成分のある多項式（一般に Pfaffian と呼ばれています）の 2 乗になり、非負です。

(4) 奇数次の交代行列式は 0 でしたが、これは奇数次の交代行列が固有値 0 を必ずもつ事を意味しています。

また、 p を交代行列 M の（実）固有値、 $\mathbb{w}$ を対応した固有ベクトルとすると、

$${}^t\mathbb{w}M\mathbb{w} = {}^t\mathbb{w}(p\mathbb{w}) = p\|\mathbb{w}\|^2$$

ですが、実数（即ち 1 次正方行列）は転置しても変わりませんから

$$p\|\mathbb{w}\|^2 = ({}^t\mathbb{w}M\mathbb{w}) = {}^t\mathbb{w}(-M)\mathbb{w} = -p\|\mathbb{w}\|^2$$

となってしまう、 $p = 0$ である事が分かります。

つまり、交代行列は、実固有値をもったとしてもそれは 0 のみである事が分かります。

もちろん虚数の範囲で固有値を求めれば固有値は存在しますが、交代行列の複素固有値は純虚数のみである事が知られています。□