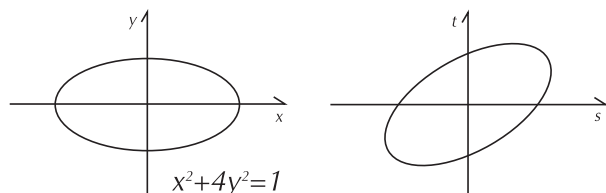


2 次曲線の分類

1 楕円を傾ける

1.1 傾いた楕円の方程式

方程式: $x^2 + 4y^2 = 1$ が表す曲線が楕円である事は周知の事実ですが、この楕円を右図の様に原点を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転させてみましょう:



このとき傾いた楕円を表す方程式はどんなものになっているのでしょうか?

点 (x, y) が傾いた楕円上にあるための条件を x, y の方程式で表せば良いわけですが、この点を $-\frac{\pi}{6}$ 回転させてやれば元の楕円上に移る事は明らかですよね。つまり、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

として得られる点 (X, Y) は方程式 $X^2 + 4Y^2 = 1$ を満たす事になります。従って、

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right)^2 + 4 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right)^2 \\ &= \frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}xy + \frac{13}{4}y^2 \end{aligned}$$

が成り立つ事が分かりました。

事実 1.1 楕円 $x^2 + 4y^2 = 1$ を $\frac{\pi}{6}$ 回転して得られる『傾いた楕円』の方程式は

$$\frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}xy + \frac{13}{4}y^2 = 1$$

である。

1.2 いろいろな 2 次方程式

さて、ここに今の一連の話を全く聞いていなかった学生さんが居たとしましょう (この教室にも実在するかも知れませんね~あはは)。その彼が、突然方程式 $\frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}xy + \frac{13}{4}y^2 = 1$ を見せられて、『この方程式の表す曲線は何か答えよ』と云われた場合、すぐに答えられるでしょうか? 恐らく無理ですね。

更に、今までの話を聞いていた方にとっても、例えば次の方程式の表す曲線はそれぞれ何でしょうか? と問われると困ってしまうはずです:

$$(1) x^2 + 4xy + y^2 = 1 \quad (2) x^2 + \frac{1}{4}xy + y^2 = 1$$

$$(3) 3x^2 + xy - 5y^2 = 1 \quad (4) 4x^2 + 4xy + y^2 = 1$$

2 対称行列による表現と対角化

ではこの回転後の 2 次式を、何をどう回転してこうなったのかを忘れてしまったとして、これがどんな曲線を表すのかを復元してみましょう。

一般に方程式 $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ に対して対称行列 $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ を考える事によって、

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + bxy + cy^2$$

と書く事が出来ます。

(1, 2)-成分と (2, 1)-成分は足して b であれば何でも良いはずです:

$$\text{例: } \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{3b}{4} \\ \frac{b}{4} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + bxy + cy^2$$

ですから単に行列で表すだけならば幾らでも表現の可能性ある訳になります。が、真ん中の行列を対称行列にするところがミソです。対称行列による表現は上に挙げただただ一つしかありません。

そこでまずこの形に変形すると

$$\frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}xy + \frac{13}{4}y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{13}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であり、この真ん中の対称行列 M の固有値・固有ベクトルを調べると、固有値は $1, 4$ であり、対応した固有ベクトルは

$$\mathbb{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

ですから、それぞれ単位ベクトル化して並べて直交行列によって対角化すれば

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\pi}{6} \text{ の回転行列} \right)$$

として

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{13}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となります。

これはまた

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{13}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

とも書けますから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{13}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= {}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= {}^t \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり、ここで

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

と置けば、

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{13}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

となって、結局、回転後の曲線を $-\frac{\pi}{6}$ だけ回転変換したもの、つまり回転前の曲線は楕円

$$X^2 + 4Y^2 = 1$$

だった事が分かります（当たり前ですが）。

ちなみに、 P でなく固有ベクトルの並べ方を変えた Q :

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

も直交行列であり、これによって対角化すると

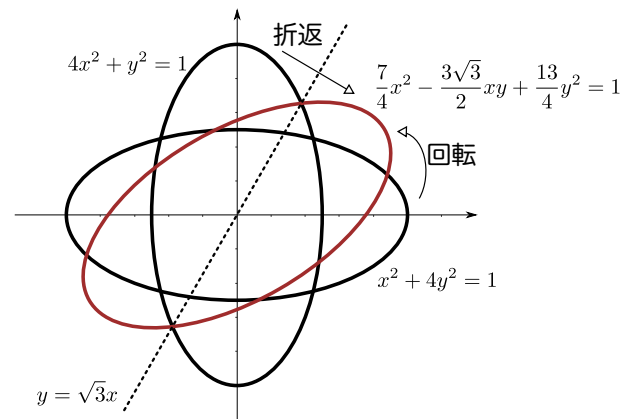
$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります。

この場合、行列 Q は回転行列ではありません。詳しくみると Q は固有値 ± 1 をもち、対応した固有ベクトルはそれぞれ

$$\mathbb{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{v}_{-1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

であって、行列 Q は直線 $y = \sqrt{3}x$ に関する折り返しであることが分かります。



3 対角化の具体的な記述例

例題 3.1 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化して下さい。

解答例 問題の行列を M とします。固有値は (計算略) $0, 3, 6$ であり、各固有値 $0, 3, 6$

に対応した固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となっています (計算略)。

固有ベクトルを並べた行列を $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば、行列式の計算により

これは正則行列です：

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6.$$

この逆行列を計算すると

$$P^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

であり、従って

$$P^{-1}MP = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

となって対角化が得られました。□

Exercise

基本演習 1 次の方程式の表す曲線はそれぞれどんな曲線でしょうか。どんな一次変換によってどんな標準的な方程式で表される曲線となるか教えてください。

- (1) $x^2 + 4xy + y^2 = 1$ (2) $x^2 + \frac{1}{4}xy + y^2 = 1$
 (3) $3x^2 + xy - 5y^2 = 1$ (4) $4x^2 + 4xy + y^2 = 1$

基本演習 2 次の方程式の表す曲線はそれぞれどんな曲線でしょうか。どんな一次変換によってどんな標準的な方程式で表される曲線となるか教えてください。

- (1) $\frac{2}{15}x^2 + \frac{2}{15}y^2 + \frac{1}{15}xy = 1$ (2) $720 = -x^2 - 27y^2 + 26\sqrt{3}xy$
 (3) $x^2 + 5y^2 + 6\sqrt{5}xy = 20$ (4) $5x^2 - 6\sqrt{6}xy + 30y^2 = 48$

基本演習 3 楕円： $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転したものを E とします。

- (1) E の方程式を求めてください。
 (2) E を x 軸方向に $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍した曲線を、さらに原点中心に $-\frac{\pi}{4}$ 回転した曲線 E_1 の方程式を求めてください。
 (3) E を x 軸方向に $\frac{4}{3}$ 倍した曲線を、さらに原点中心に $-\frac{\pi}{6}$ 回転した曲線 E_2 の方程式を求めてください。

基本演習 4 次の各行列の固有値・固有ベクトルを求め、対角化して下さい。

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

基本演習 5 次の各行列 M を対角化し、更に M^n を求めて下さい：

- (3) $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ (4) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

基本演習 6 次の対称行列を直交行列によって対角化して下さい。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 解答例

基本演習 1 次の方程式の表す曲線はそれぞれどんな曲線でしょうか。どんな一次変換によってどんな標準的な方程式で表される曲線となるか教えてください。

- (1) $x^2 + 4xy + y^2 = 1$ (2) $x^2 + \frac{1}{4}xy + y^2 = 1$
 (3) $3x^2 + xy - 5y^2 = 1$ (4) $4x^2 + 4xy + y^2 = 1$

(1) 式変形すると

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

と書けるので、この係数行列（これを M とします）の固有値・固有ベクトルを求めて対角化を考えます。

普通に求めれば良いところですが、この行列は見た目で簡単に固有ベクトルが分かっていますね。

例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 3 に関する固有ベクトルですし、 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 -1 に関する固有ベクトルです。

そこで、2本の（長さを1にした）固有ベクトル $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を並べて得られる行列を $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば、 ${}^tP = P^{-1}$ なので（直交行列である）、

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= P^{-1} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ですから、 $P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とおけば、

$${}^t \left\{ P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} P^{-1}MP \left\{ P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

となって、

$$3X^2 - Y^2 = 1$$

を得ます。

ここで行列 P は角度 $\frac{\pi}{4}$ の回転行列ですから、この事実は題意の曲線を回転すると双曲線になっていることを示しており、従って元々傾いた双曲線であったことが分かります。

(2)、(3) も同様に計算出来ます。

一般に、 n 次対称行列は常に実固有値を（重複度も込めて） n 個もち、異なる固有値に対応する固有ベクトル同士は直交しています。また、重複度 m の固有値に属する固有ベクトルは m 次元分存在し、互いに直交する様な m 本を選ぶことが出来ます。従って対称行列は常に直交行列によって対角化することが出来ます。

$n = 2, 3$ ぐらいで実際に計算してみて確かめて下さい。

(4) この式は左辺が因数分解されて

$$(2x + y)^2 = 1$$

と書けていますから、これは

$$2x + y = 1 \quad \text{又は} \quad 2x + y = -1$$

と云う事になって、2直線です。 □

基本演習 2 次の方程式の表す曲線はそれぞれどんな曲線でしょうか。どんな一次変換によってどんな標準的な方程式で表される曲線となるか教えてください。

- (1) $\frac{2}{15}x^2 + \frac{2}{15}y^2 + \frac{1}{15}xy = 1$ (2) $720 = -x^2 - 27y^2 + 26\sqrt{3}xy$
 (3) $x^2 + 5y^2 + 6\sqrt{5}xy = 20$ (4) $5x^2 - 6\sqrt{6}xy + 30y^2 = 48$

(1) この曲線は

$$\frac{4}{30}x^2 + \frac{2}{30}xy + \frac{4}{30}y^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{4}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

と表され、 $M = \begin{pmatrix} \frac{4}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} & \frac{4}{30} \end{pmatrix}$ と置けば

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{30} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{30} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がすぐに分かるので、固有値は $\frac{1}{6}, \frac{1}{10}$ であり、対応した固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

そこで $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ と置けばこれは正則行列であって

$$MP = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \frac{1}{10}P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

と対角化されます。従って

$$M = P \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} P^{-1}$$

ですから、 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と置けば曲線の方程式は

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 1$$

$$\frac{1}{6}X^2 + \frac{1}{10}Y^2 = 1$$

と変形されます。 P は回転行列でしたから、この曲線は楕円を回転したものであって、楕円であることが分かります。

(2) この曲線は

$$\frac{-1}{720}x^2 + \frac{26\sqrt{3}}{720}xy + \frac{-27}{720}y^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{720} & \frac{13\sqrt{3}}{720} \\ \frac{13\sqrt{3}}{720} & \frac{-27}{720} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

と表され、 $M = \begin{pmatrix} \frac{-1}{720} & \frac{13\sqrt{3}}{720} \\ \frac{13\sqrt{3}}{720} & \frac{-27}{720} \end{pmatrix}$ と置けば、固有方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \frac{-1}{720} - t & \frac{13\sqrt{3}}{720} \\ \frac{13\sqrt{3}}{720} & \frac{-27}{720} - t \end{vmatrix} \\ &= \left(t + \frac{1}{720}\right) \left(t + \frac{27}{720}\right) - \frac{3 \cdot 13^2}{720^2} \\ &= t^2 + \frac{28}{720}t - \frac{480}{720^2} \\ &= \left(t - \frac{12}{720}\right) \left(t + \frac{40}{720}\right) \end{aligned}$$

なので、固有値は $\frac{1}{60}, -\frac{1}{18}$ です。

固有値 $\frac{1}{60}$ に対応する固有ベクトルを求めると、

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{720} - \frac{12}{720} & \frac{13\sqrt{3}}{720} \\ \frac{13\sqrt{3}}{720} & \frac{-27}{720} - \frac{12}{720} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から $x - \sqrt{3}y = 0$ が得られ、 $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

一方、固有値 $-\frac{1}{18}$ に対応した固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{720} + \frac{40}{720} & \frac{13\sqrt{3}}{720} \\ \frac{13\sqrt{3}}{720} & \frac{-27}{720} + \frac{40}{720} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から $\sqrt{3}x + y = 0$ が得られ、 $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ です。

そこで

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

と置けばこれは正則行列であって

$$\begin{aligned} MP &= \begin{pmatrix} M \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} & M \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{60} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} & -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{60} P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & -\frac{1}{18} P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} \frac{1}{60} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{18} \end{pmatrix} \\ P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{60} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{18} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と対角化されます。

従って $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と置けば曲線の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{-1}{720}x^2 + \frac{26\sqrt{3}}{720}xy + \frac{-27}{720}y^2 &= 1 \\ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 1 \\ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \frac{1}{60} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{18} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 1 \\ \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{60} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= 1 \\ \frac{1}{60}X^2 - \frac{1}{18}Y^2 &= 1 \end{aligned}$$

と変形されます。行列 P は回転行列ですから、この曲線は双曲線を回転したもの、つまり、双曲線であることが分かります。

(3) この曲線は

$$\frac{1}{20}x^2 + \frac{6\sqrt{5}}{20}xy + \frac{5}{20}y^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{3\sqrt{5}}{20} \\ \frac{3\sqrt{5}}{20} & \frac{5}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

と表され、 $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{3\sqrt{5}}{20} \\ \frac{3\sqrt{5}}{20} & \frac{5}{20} \end{pmatrix}$ と置けば、固有方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{20} - t & \frac{3\sqrt{5}}{20} \\ \frac{3\sqrt{5}}{20} & \frac{5}{20} - t \end{vmatrix} \\ &= \left(t - \frac{1}{20}\right) \left(t - \frac{5}{20}\right) - \frac{45}{20^2} \\ &= t^2 - \frac{6}{20}t - \frac{40}{20^2} \\ &= \left(t - \frac{3}{20}\right)^2 - \frac{49}{20^2} \\ &= \left(t - \frac{10}{20}\right) \left(t + \frac{4}{20}\right) \end{aligned}$$

なので、固有値は $\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}$ です。

固有値 $\frac{1}{2}$ に対応した固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} \frac{-9}{20} & \frac{3\sqrt{5}}{20} \\ \frac{3\sqrt{5}}{20} & \frac{-5}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から $3x - \sqrt{5}y = 0$ が得られて $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 3 \end{pmatrix}$ です。

一方固有値 $-\frac{1}{5}$ に対応した固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{20} & \frac{3\sqrt{5}}{20} \\ \frac{3\sqrt{5}}{20} & \frac{9}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から $\sqrt{5}x + 3y = 0$ が得られて $\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ です。

そこで

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{14}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \sqrt{\frac{5}{14}} \end{pmatrix}$$

と置けばこれは回転行列であって、

$$\begin{aligned} MP &= \begin{pmatrix} M \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} & M \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{14}} \\ \sqrt{\frac{5}{14}} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} & -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{14}} \\ \sqrt{\frac{5}{14}} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & -\frac{1}{5}P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と対角化されます。

従って $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と置けば曲線の方程式は

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{3\sqrt{5}}{20} \\ \frac{3\sqrt{5}}{20} & \frac{5}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{5}Y^2 \end{aligned}$$

と書けるので、双曲線であることが分かります。

(4) 全く同様なので省略。楕円かな。

□

ですから、 E の方程式は以下の通りです：

$$1 = \frac{8}{45}x^2 + \frac{2}{15}y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{45}xy$$

(2) E を $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍した曲線の方程式は

$$1 = \frac{2}{15}x^2 + \frac{2}{15}y^2 - \frac{1}{15}xy$$

(2) E を x 軸方向に $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍した曲線を、さらに原点中心に $-\frac{\pi}{4}$ 回転した曲線 E_1 の方程式を求めてください。

(3) E を x 軸方向に $\frac{4}{3}$ 倍した曲線を、さらに原点中心に $-\frac{\pi}{6}$ 回転した曲線 E_2 の方程式を求めてください。

θ の回転行列を R_θ とします。

(1) 点 (x, y) を $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点を (X, Y) とすると、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R_{-\frac{\pi}{3}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であり、点 (x, y) が E 上にあることは (X, Y) が楕円： $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 上にあることと同等であって、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= 1 \\ {}^t \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= 1 \\ {}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} {}^t R_{-\frac{\pi}{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} R_{-\frac{\pi}{3}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 1 \\ {}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 1 \\ {}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 1 \\ {}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{45} & -\frac{\sqrt{3}}{45} \\ -\frac{\sqrt{3}}{45} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 1 \end{aligned}$$

基本演習 3 楕円： $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転したものを E とします。

(1) E の方程式を求めてください。

$$30 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

です。これを $-\frac{\pi}{4}$ 回転すると

$$\begin{aligned} 30 &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} {}^t R_{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} R_{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ 30 &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ 60 &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ですから E_1 の方程式は

$$60 = 6x^2 + 10y^2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$$

です。

(3) E を $\frac{4}{3}$ 倍した曲線の方程式は

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{10}x^2 + \frac{2}{15}y^2 - \frac{\sqrt{3}}{30}xy \\ 60 &= 6x^2 + 8y^2 - 2\sqrt{3}xy \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

です。これを $-\frac{\pi}{6}$ だけ回転すると

$$\begin{aligned} 60 &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} {}^t R_{\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} 6 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 8 \end{pmatrix} R_{\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$60 = 5x^2 + 9y^2$$

$$1 = \frac{x^2}{12} + \frac{3y^2}{20}$$

です。

□

基本演習 4 次の各行列の固有値・固有ベクトルを求め、対角化して下さい。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 固有方程式が

$$0 = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(2-x)$$

である事から固有値は 1, 2 であり、次に固有ベクトルを求めます。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

によれば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有値 1 に関する固有ベクトルであり、また、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けば $x = y$ であり、従って固有値 2 に関する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である事が分かります。

そこで固有ベクトルを並べた行列を P とすれば：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これは正則であり、

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、

$$\begin{aligned} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となって対角化されます。

(2) 固有方程式は

$$0 = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 0 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^2$$

なので固有値は 2 です。

次に固有ベクトルを求めますが、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けば $y = 0$ であり、従って固有値 2 に関する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のみであることが分かります。

この場合、固有値が重複度 2 の重根であるのに、それに対応した固有ベクトルは 1 次元分しか存在せず、対角化は不可能です。 $\square$

基本演習 5 次の各行列 M を対角化し、更に M^n を求めて下さい：

$$(3) M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad (4) M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 固有値は 1, 2, 3、固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$ です (計算略)。

固有ベクトルを並べて得られる行列を P とすれば、

$$\begin{vmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1(-4+2) = 2$$

からこれは正則です。

そこで、逆行列を求めると、

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 14 & -6 & 2 \\ 13 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 14 & 13 & 3 \\ -6 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 14 & 13 & 3 \\ -6 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 11 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 14 & 13 & 3 \\ -6 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -10 & -21 \\ 1 & 8 & 15 \\ 1 & 12 & 33 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となって対角化されます。対角行列を D とおけば

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= D \\ (P^{-1}MP)^n &= D^n \\ P^{-1}M^nP &= D^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M^n &= PD^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 14 & 13 & 3 \\ -6 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -5 \cdot 2^n & -7 \cdot 3^n \\ 1 & 4 \cdot 2^n & 5 \cdot 3^n \\ 1 & 6 \cdot 2^n & 11 \cdot 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 13 & 3 \\ -6 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -14 + 30 \cdot 2^n - 14 \cdot 3^n & -13 + 20 \cdot 2^n - 7 \cdot 3^n & -3 + 10 \cdot 2^n - 7 \cdot 3^n \\ 14 - 24 \cdot 2^n + 10 \cdot 3^n & 13 - 16 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n & 3 - 8 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n \\ 14 - 36 \cdot 2^n + 22 \cdot 3^n & 13 - 24 \cdot 2^n + 11 \cdot 3^n & 3 - 12 \cdot 2^n + 11 \cdot 3^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が得られます。

(4) 固有値は $1, 2, -1$ 、固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です (計算略)。

固有値は全て異なるため、対応した 3 本の固有ベクトルの組は一次独立であり (あるいは、同一平面上になく)、それらを並べて得られる行列 P は正則です。

従って、固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_{-1}$ と書けば、

$$\begin{aligned}
MP &= M \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\mathbf{v}_1 & 2\mathbf{v}_2 & -1\mathbf{v}_{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P\mathbf{e}_1 & 2P\mathbf{e}_2 & -P\mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \\
&= P \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & 2\mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \\
P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & 2\mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となって対角化されます。ただし、

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします。

このように、単に対角化だけであれば行列 P の逆行列を求めずに済みます方法もありますが、この問題では結局 M^n を求めなくてはならないのでその時に P^{-1} も必要になります。

対角化した対角行列を D とおけば

$$(P^{-1}MP)^n = D^n$$

$$P^{-1}M^nP = D^n$$

$$M^n = PD^nP^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 0 \\ 3 & 2 \cdot 2^n & (-1)^n \\ 2 & 2 \cdot 2^n & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & 1 - 2^n & -1 + 2^n \\ 2 \cdot 2^n - 2(-1)^n & 3 - 2 \cdot 2^n & -3 + 2 \cdot 2^n + (-1)^n \\ 2 \cdot 2^n - 2(-1)^n & 2 - 2 \cdot 2^n & -2 + 2 \cdot 2^n + (-1)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

です。

□

基本演習 6 次の対称行列を直交行列によって対角化して下さい。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 1-x & -1 & 1 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = -(x+1)(x-2)^2$$

ですから固有値は $-1, 2$ であり、それぞれに対応した固有ベクトルを求めると、

$$\text{固有値 } -1: \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{固有値 } 2: \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となっており、 p_1 は p_2, p_3 の双方と直交していますが p_2 と p_3 は直交していません。

そこで、 $p_4 = ap_2 + bp_3$ が p_2 と直交する様に (p_1 と直交する事は明らか) 定数 a, b を決めようと思いますが、

$$0 = p_2 \cdot (ap_2 + bp_3) = 2a + b$$

ですから、例えば $a = -1, b = 2$ とすれば、

$$p_4 = -p_2 + 2p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られます。

以上から、 p_1, p_2, p_4 を長さ 1 にして並べて出来る行列 P は直交行列になります：

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

更にこのとき、元の行列を M とすれば、

$$\begin{aligned} MP &= M \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}p_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}p_2 & \frac{1}{\sqrt{6}}p_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}Mp_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}Mp_2 & \frac{1}{\sqrt{6}}Mp_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}}p_1 & \frac{2}{\sqrt{2}}p_2 & \frac{2}{\sqrt{6}}p_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & 2P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 2P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となって M を P によって対角化する事が出来ます。

□