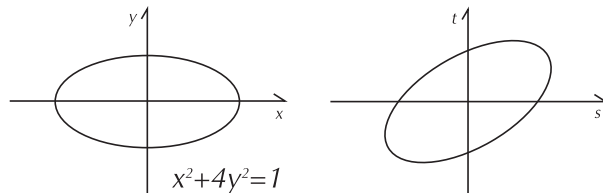


2 次曲線の分類

1 楕円を傾ける

1.1 傾いた楕円の方程式

方程式： $x^2 + 4y^2 = 1$ が表す曲線が楕円である事は周知の事実ですが、この楕円を下右図の様に原点を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転させてみましょう：



このとき傾いた楕円を表す方程式はどんなものになっているのでしょうか？

点 (x, y) が傾いた楕円上にあるための条件を x, y の方程式で表せば良いわけですが、この点を $-\frac{\pi}{6}$ 回転させてやれば元の楕円上に移る事は明らかですよね。つまり、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

として得られる点 (X, Y) は方程式 $X^2 + 4Y^2 = 1$ を満たす事になります。従って、

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right)^2 + 4 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right)^2 \\ &= \frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}xy + \frac{13}{4}y^2 \end{aligned}$$

が成り立つ事が分かりました。

事実 1.1 楕円 $x^2 + 4y^2 = 1$ を $\frac{\pi}{6}$ 回転して得られる『傾いた楕円』の方程式は

$$\frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}xy + \frac{13}{4}y^2 = 1$$

である。

1.2 いろいろな 2 次方程式

さて、ここに今の一連の話を全く聞いていなかった学生さんが居たとしましょう（この教室にも実在するかも知れませんね～あはは）。その彼が、突然方程式 $\frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}xy + \frac{13}{4}y^2 = 1$ を見せられて、『この方程式の表す曲線は何か答えよ』と云われた場合、すぐに答えられるでしょうか？ 恐らく無理ですね。

更に、今までの話を聞いていた方にとっても、例えば次の方程式の表す曲線はそれぞれ何でしょうか？ と問われると困ってしまうはずです：

$$(1) x^2 + 4xy + y^2 = 1 \quad (2) x^2 + \frac{1}{4}xy + y^2 = 1$$

$$(3) 3x^2 + xy - 5y^2 = 1 \quad (4) 4x^2 + 4xy + y^2 = 1$$

2 対称行列による表現と対角化

ではこの回転後の 2 次式を、何をどう回転してこうなったのかを忘れてしまったとして、これがどんな曲線を表すのかを復元してみましょう。

一般に方程式 $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ に対して対称行列 $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ を考える事によって、

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + bxy + cy^2$$

と書く事が出来ます。

(1, 2)-成分と (2, 1)-成分は足して b であれば何でも良いはずです：

$$\text{例：} \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{3b}{4} \\ \frac{b}{4} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + bxy + cy^2$$

ですから単に行列で表すだけならば幾らでも表現の可能性ある訳になります。が、真ん中の行列を対称行列にするところがミソです。対称行列による表現は上に挙げただただ一つしかありません。

そこでまずこの形に変形すると

$$\frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}xy + \frac{13}{4}y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{13}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であり、この真ん中の対称行列 M の固有値・固有ベクトルを調べると、固有値は 1, 4 であり、対応した固有ベクトルは

$$\mathbb{V}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{V}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

ですから、それぞれ単位ベクトル化して並べて直交行列によって対角化すれば

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\pi}{6} \text{ の回転行列}\right)$$

として

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{13}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となります。

これはまた

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{13}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

とも書けますから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{13}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= {}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= {}^t \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり、ここで

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

と置けば、

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{13}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

となって、結局、回転後の曲線を $-\frac{\pi}{6}$ だけ回転変換したもの、つまり回転前の曲線は楕円

$$X^2 + 4Y^2 = 1$$

だった事が分かります（当たり前ですが）。

ちなみに、 P でなく固有ベクトルの並べ方を変えた Q :

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

も直交行列であり、これによって対角化すると

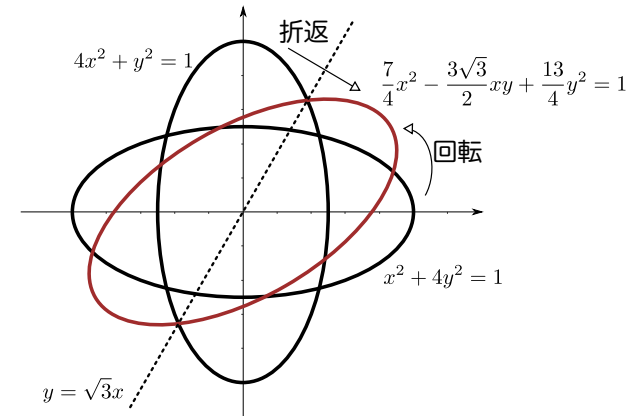
$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります。

この場合、行列 Q は回転行列ではありません。詳しくみると Q は固有値 ± 1 をもち、対応した固有ベクトルはそれぞれ

$$\mathbb{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{V}_{-1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

であって、行列 Q は直線 $y = \sqrt{3}x$ に関する折り返しであることが分かります。



3 対角化の具体的な記述例

例題 3.1 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化して下さい。

解答例 問題の行列を M とします。固有値は (計算略) $0, 3, 6$ であり、各固有値 $0, 3, 6$

に対応した固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となっています (計算略)。

固有ベクトルを並べた行列を $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば、行列式の計算により

これは正則行列です：

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6.$$

この逆行列を計算すると

$$P^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

であり、従って

$$P^{-1}MP = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

となって対角化が得られました。□

Exercise

基本演習 1 次の方程式の表す曲線はそれぞれどんな曲線でしょうか。どんな一次変換によってどんな標準的な方程式で表される曲線となるか教えてください。

- (1) $x^2 + 4xy + y^2 = 1$ (2) $x^2 + \frac{1}{4}xy + y^2 = 1$
 (3) $3x^2 + xy - 5y^2 = 1$ (4) $4x^2 + 4xy + y^2 = 1$

基本演習 2 次の方程式の表す曲線はそれぞれどんな曲線でしょうか。どんな一次変換によってどんな標準的な方程式で表される曲線となるか教えてください。

- (1) $\frac{2}{15}x^2 + \frac{2}{15}y^2 + \frac{1}{15}xy = 1$ (2) $720 = -x^2 - 27y^2 + 26\sqrt{3}xy$
 (3) $x^2 + 5y^2 + 6\sqrt{5}xy = 20$ (4) $5x^2 - 6\sqrt{6}xy + 30y^2 = 48$

基本演習 3 楕円： $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転したものを E とします。

- (1) E の方程式を求めてください。
 (2) E を x 軸方向に $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍した曲線を、さらに原点中心に $-\frac{\pi}{4}$ 回転した曲線 E_1 の方程式を求めてください。
 (3) E を x 軸方向に $\frac{4}{3}$ 倍した曲線を、さらに原点中心に $-\frac{\pi}{6}$ 回転した曲線 E_2 の方程式を求めてください。

基本演習 4 次の各行列の固有値・固有ベクトルを求め、対角化して下さい。

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

基本演習 5 次の各行列 M を対角化し、更に M^n を求めて下さい：

- (3) $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ (4) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

基本演習 6 次の対称行列を直交行列によって対角化して下さい。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$