２次元一次変換による点の流れ

1　一次変換による点の流れ

点 (x_0, y_0) から出発して、一次変換 A によって次々と点を動かしていくとき、それらの点はどんな曲線を描くでしょうか。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad\to\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad\to\quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad\to\cdots$$

1.1　簡単な例　その１

特に簡単な行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ の場合は

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n x_0 \\ 9^n y_0 \end{pmatrix}$$

ですから一般に $x_0, y_0 \neq 0$ であれば

$$\left(\frac{x_n}{x_0}\right)^2 = \frac{y_n}{y_0}$$

が成り立っており、点 (x_n, y_n) は常に曲線

$$y = \frac{y_0}{x_0^2}x^2$$

上にあることが分かります。正確には $x_0 > 0$ であれば上記放物線の $x > 0$ に対応する部分、などとなります。

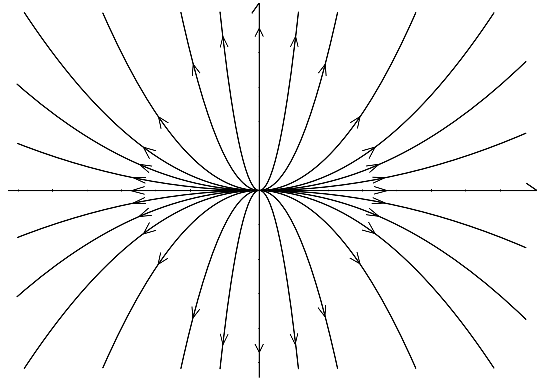
$(x_0, y_0) = (0, 0)$ であれば、明らかに $(x_n, y_n) = (0, 0)$ のままで点は動きません。

もしも $x_0 = 0, y_0 \neq 0$ であれば、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9^n y_0 \end{pmatrix}$$

ですから、点は常に y-軸上にあることが分かります。全く同様に $x_0 \neq 0, y_0 = 0$ の場合は、点は常に x-軸上にあります。

以上から、行列 A の表す一次変換が平面内の点をどのように移動させるか全体像が見えてきます：



原点を中心に放射線状に外へ外へ点が移動していく様子がわかるでしょうか。y-座標の大きくなり方の方が x-座標の大きくなり方より早いこともわかるでしょう。

1.2　簡単な例　その２

また、別の行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ の場合は

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n}x_0 \\ 2^n y_0 \end{pmatrix}$$

ですから一般に

$$x_n y_n = x_0 y_0$$

が成り立っており、点 (x_n, y_n) は曲線

$$xy = x_0 y_0$$

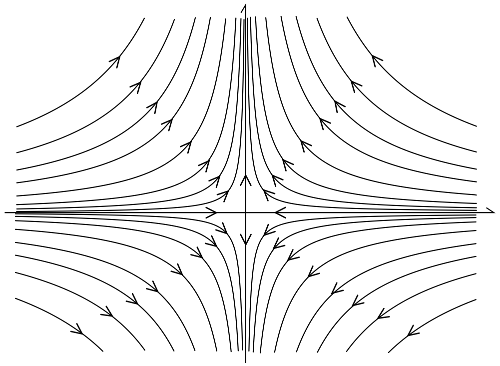
上にあることが分かります。

$(x_0, y_0) = (0, 0)$ であれば、明らかに $(x_n, y_n) = (0, 0)$ のままで点は動きません。

もしも $x_0 = 0, y_0 \neq 0$ であれば、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2^n y_0 \end{pmatrix}$$

ですから、点は常に y-軸上にあり、無限遠方へ移動して行きます。全く同様に $x_0 \neq 0, y_0 = 0$ の場合は、点は常に x-軸上にあり、原点の方へ向かって移動します。



今回の行列 A の表す一次変換の全体像はちょっと違っています（左図）。

x-軸上では原点に向かい、y-軸上では無限遠方に向かっており、それにつられてその他の領域では双曲線の上を移動していることが分かります。

1.3　固有値・固有ヴェクターとの関係

行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$ でも同じことを考えます。固有値は $\frac{1}{2}, 2$ の２つであり、固有ヴェクターはそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

出発点を (x_0, y_0) としますが、これを固有ヴェクターを使って

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y_0 - x_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と分解しておきます。すると、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^n \left\{ x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y_0 - x_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = x_0 \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y_0 - x_0) 2^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

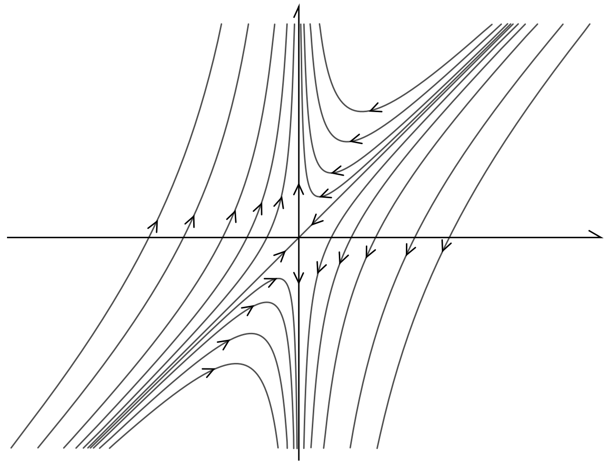
ですから、$x_0 \neq 0, x_0 \neq y_0$ であれば（これはつまり出発点の位置ヴェクターが固有ヴェクターでないと云う条件です）

$$\frac{x_n}{x_0} = 2^{-n}, \quad \frac{y_n - x_n}{y_0 - x_0} = 2^n$$

が成り立っています。従って点 (x_n, y_n) は曲線

$$x(y - x) = x_0(y_0 - x_0)$$

上にあることが分かります。



$(x_0, y_0) = (0, 0)$ の場合はやはり点は動きませんし、$x_0 = 0, y_0 \neq 0$ の場合は点は原点から遠ざかって無限遠点の方へ向かって行きます。$x_0 = y_0, x_0 \neq 0$ の場合は点は原点に向かって行きます。

この様に、出発点（の位置ヴェクター）が固有ヴェクターである場合は、点は直線上を動くことになり、対応する固有値が正で 1 より小さければ原点に向かい、1 より大きければ無限遠方へ向かいます。

この時、原点を通り固有ヴェクターに平行な直線上の点はこの一次変換で同じ直線上に移され、直線上の全ての点の移り先の全体はまたその直線自身になっています。この様な状況を指して、この直線はこの一次変換における不動直線である、と言います。今見た 3 つの例ではいずれも不動直線が２本（のみ）ありました。

また、最初の例における放物線や、次の例での双曲線、最後の例に出てきた『ひしゃげた双曲線』も、曲線上の点の移り先全体がまた自分自身になっており、こういった曲線は『不動曲線』とも呼ばれます。

1.4　固有値 1 をもつ場合

行列 A が固有値 1 をもち、更に対応する固有ヴェクターが 2 次元あった場合、任意のヴェクターが固有ヴェクターであることになってしまい、これはつまり一切のヴェクターを動かさないことを意味します。この場合行列 A は単位行列でしかあり得ません。

２次正方行列の固有方程式は実数係数の 2 次方程式ですから、固有値 1 がある場合、それは重解であるか、もしくはもう一つ別の固有値があるか、どちらかです。

そこでまずはもう一つ別の（正の）固有値がある場合を考えましょう。

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は $1, 2$ であり、固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

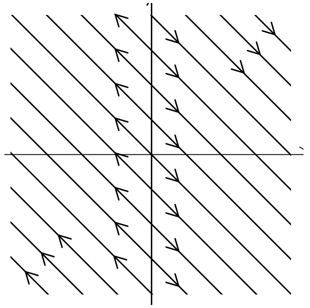
出発点 (x_0, y_0) を

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (x_0 + y_0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - x_0\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と分解すれば、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\left\{(x_0 + y_0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - x_0\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = (x_0 + y_0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - x_0 2^n\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ですから任意の n に対して $x_n + y_n = x_0 + y_0$ が成り立っており、従って点 (x_n, y_n) は常に直線 $y = -x + x_0 + y_0$ の上にあることが分かります。



今回は原点のみならず、y-軸上の任意の点が動きません。従って y-軸は不動直線です。

また、任意の点 (x_0, y_0) を通る傾き -1 の直線 $y = -x + x_0 + y_0$ も不動直線になっていますが、これらは内部で無限遠方へ動いています。もし 1 以外の固有値が 1 より小さければ、無限遠方ではなくこの直線上の不動点 $(0, x_0 + y_0)$ に向かって行くでしょう。

1.5　固有ヴェクターが足りない場合

固有値が重解であって固有ヴェクターが 1 次元分しかない場合はどうなるのでしょうか。まずは固有値が 1 より大きい場合です。

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ の表す一次変換を考えます。固有値は 2 のみで、固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の１本だけしかありません。計算によれば

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

ですから

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n x_0 + n2^{n-1}y_0 \\ 2^n y_0 \end{pmatrix}$$

であって、$y_0 \neq 0$ であれば

$$\frac{y_n}{y_0} = 2^n \quad \text{従って} \quad n = \log_2 \frac{y_n}{y_0}$$

が分かります。

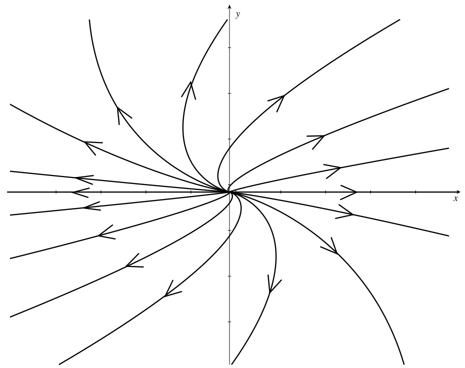
更に

$$x_n = y_n\left(\frac{x_0}{y_0} + \frac{\log\frac{y_n}{y_0}}{2\log 2}\right)$$

となりますから、点 (x_n, y_n) は常に曲線：

$$x = y\left(\frac{x_0}{y_0} + \frac{\log\frac{y}{y_0}}{2\log 2}\right)$$

の上にあります。

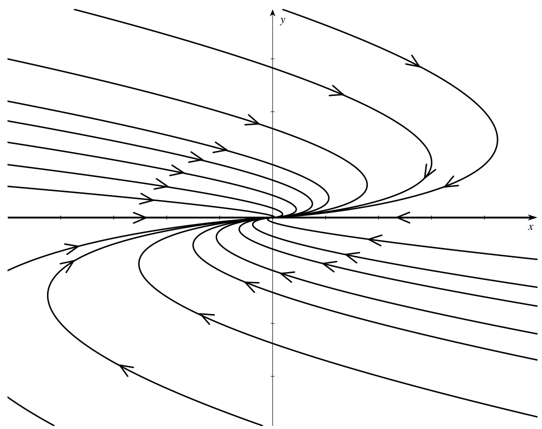


この場合、x-軸が不動直線であり（無限遠方へ広がっています）、x-軸上にない出発点からスタートすると図の様に曲がりながら無限遠方へと移って行きます。

固有値が正で 1 より小さい場合も同様に計算できます。行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ の場合、点 (x_0, y_0) から出発すると、点 (x_n, y_n) は一般に曲線：

$$x = y\left(\frac{x_0}{y_0} - \frac{2\log\frac{y}{y_0}}{\log 2}\right)$$

上にあります。x-軸が唯一の不動直線であり、内部では原点へ向かって移動しています。



1.6　不動直線の方向ヴェクター

点 $\mathbb{a}$ を通り、ヴェクター $\mathbb{v} \neq \mathbb{o}$ に平行な直線：$\mathbb{x} = \mathbb{a} + t\mathbb{v}$（$t$ はパラメーター）が一次変換 M で不動であるとき、$M\mathbb{x}$ を計算してみると

$$M\mathbb{x} = M\mathbb{a} + tM\mathbb{v}$$

となりますね。パラメーター t にいろいろな値を入れれば直線上の全ての点の像がこれで求まったわけですが、$M\mathbb{v}$ がゼロヴェクターでなければこの像はまた直線になっている事が分かります。

元の直線が一次変換 M で自分自身に移ると仮定すると、少なくともこれらの直線の方向ヴェクターは平行でなければなりません。すなわちある定数 p が存在して

$$M\mathbb{v} = p\mathbb{v}$$

となっていなければなりませんが（$M\mathbb{v} \neq \mathbb{o}$ なので p も 0 ではない)、これは即ち、$\mathbb{v}$ が M の固有ヴェクターである事を示しています。

<u>必要条件その１：</u>　直線の方向ヴェクター $\mathbb{v}$ は、M の、0 でない固有値 p に対応した固有ヴェクターでなければならない。

もしも $M\mathbb{v} = \mathbb{o}$ ならば（すなわち、$\mathbb{v}$ は M の固有値 0 に対応した固有ヴェクターであるならば)、元の直線の像は $M\mathbb{a}$ １点となってしまいますし、そもそも固有ヴェクターでなかったら、像は直線ですが方向の違った直線になってしまいます。

Exercise

基本演習 1 行列 $C = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{7}{2} \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えてください。

(1) C の固有値・固有ヴェクターを求めてください。

(2) C の表す 1 次変換によって平面内の点がどの様に動くか図示してください。

基本演習 2 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の表す一次変換によって直線 $y = -x + k$ は自分自身に移るそうです。さて k の値は何でしょうか。

基本演習 3 次の各行列の表す一次変換で自分自身に移る直線を全て求めて下さい。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

基本演習 4 固有値が 1 のみ（重根）で、固有ヴェクターが 1 本しかない場合は、1 次変換はどんな様子になるでしょうか。行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の場合に計算してください。

基本演習 5 ３本の直線 l_1, l_2, l_3 はどの２本も１点のみで交わり、３本が１点で交わってはいないものとします。ある２次正方行列 M の表す１次変換によってこれら３本がそれぞれ不動直線であるとき、この１次変換による不動直線を全て求めて下さい。

基本演習 6 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ となることを示してください。

基本演習 7 2 次正方行列 A が２つの異なる固有値 λ_1, λ_2 をもつとき、

$$A^n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} A + \frac{\lambda_1\lambda_2^n - \lambda_1^n\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} E$$

となることを示してください。

基本演習 8 ２次正方行列 M は対称行列であって $|M| = 1$ であるとします。このとき M^2 の表す一次変換によって平面内の点はどのように流れるか考えて下さい。

基本演習 9 ２次正方行列 M が $M \neq O, M \neq E$ であって $M^2 = M$ であるとき、M の表す一次変換によって平面内の点はどのように流れるでしょうか。

発展演習 10 固有値がない場合は 1 次変換はどんな様子になるでしょうか。

発展演習 11 2 次正方行列 M の表す一次変換で不動な直線について、固有値・固有ヴェクターの様子で分類して考えてみて下さい。

発展演習 12 一般に 2 次正方行列 A が２つの異なる正の固有値 p_1, p_2 をもつとき、どんな曲線が不動曲線となるか考えてみてください。

Exercise 解答例

基本演習 1 行列 $C = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{7}{2} \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えてください。

(1) C の固有値・固有ヴェクターを求めてください。

(2) C の表す 1 次変換によって平面内の点がどの様に動くか図示してください。

(1)

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{15}{2} - x & -\frac{7}{2} \\ 7 & -3 - x \end{vmatrix} = (x+3)\left(x - \frac{15}{2}\right) + \frac{49}{2} = x^2 - \frac{9}{2}x + 2 = (x-4)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

によれば固有値は $4, \frac{1}{2}$ です。

対応した固有ヴェクターを求めると、まず固有値 4 に関しては

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ 7 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

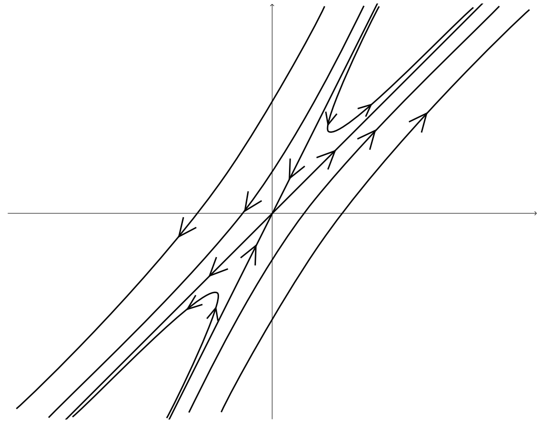
から $x = y$ が分かりますから求める固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

次に固有値 $\frac{1}{2}$ に関しては、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -\frac{7}{2} \\ 7 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

から $y = 2x$ がわかりますから、求める固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ です。

(2) (1) の結果から、直線 $y = x$ 上の点はこの直線上を無限遠方へ遠ざかるように移動し、また直線 $y = 2x$ 上の点はこの直線上を原点に向かって移動します。そのほかの部分は図のように動きます：



□

基本演習 2 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の表す一次変換によって直線 $y = -x + k$ は自分自身に移るそうです。さて k の値は何でしょうか。

この直線上の点 $(t, -t + k)$ の移り先は

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -t + k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + k \\ -t + 2k \end{pmatrix}$$

により点 $(t + k, -t + 2k)$ ですが、この点が任意の t に対して元の直線上にあると仮定します。すると

$$-t + 2k = -(t + k) + k$$
$$k = 0$$

が得られます。従って $k = 0$ である必要があります。

逆に $k = 0$ の場合、直線の全体が同じ直線の全体に移ることは上の計算（の $k = 0$ の場合）により明らかです。

以上により、求める k の値は 0 です。 □

基本演習 3 次の各行列の表す一次変換で自分自身に移る直線を全て求めて下さい。

(1) $\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(1) まず固有値と固有ヴェクターを求めます。

この行列を A としたとき、固有値は固有方程式 $|A - xE| = 0$ の実数解の事だからこれを解けば良く、

$$0 = |A - xE| = \begin{vmatrix} 9-x & 12 \\ 12 & 16-x \end{vmatrix} = x^2 - 25x = x(x-25)$$

となるので固有値は $0, 25$ です。

次に固有値 0 に関する固有ヴェクターを求めます。それは、

$$A\mathbb{v} = \mathbb{o}$$

となるヴェクター $\mathbb{v}$ を求める事であり、具体的に書けば

$$\begin{cases} 9x + 12y = 0 \\ 12x + 16y = 0 \end{cases}$$

を満たすヴェクター $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めれば良いことになります。このとき $3x = -4y$ であり、従って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ 3y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が得られるので求める固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ です。

次に固有値 25 に関する固有ヴェクターを求めます。それは、

$$(A - 25E)\mathbb{v} = \mathbb{o}$$

となるヴェクター $\mathbb{v}$ を求める事であり、具体的に書けば

$$\begin{cases} -16x + 12y = 0 \\ 12x - 9y = 0 \end{cases}$$

を満たすヴェクター $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めれば良いでしょう。

$4x = 3y$ であり、従って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ 4y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

が得られるので求める固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ です。

最後に不動直線を求めます。

不動直線の方向ヴェクターは 0 でない固有値に関する固有ヴェクターでなければならないため、この場合その可能性は $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ しかありません。従って不動直線は、少なくとも

$$y = -\frac{3}{4}x + k$$

の型のものに限られます。

この直線上の点 $(4t, -3t + k)$ の移り先は

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4t \\ -3t + k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12k \\ 16k \end{pmatrix}$$

であり、これがまた同一の直線上にあるための条件は

$$16k = -\frac{3}{4} \cdot 12k + k$$
$$k = 0$$

です。従って不動直線は

$$3x + 4y = 0$$

のみ。

(2) まず固有値と固有ヴェクターを求めます。

この行列を B としたとき、

$$0 = |B - xE| = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & -2-x \end{vmatrix} = (x+2)(x-1) - 4 = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

となるので固有値は $-3, 2$ です。

次に固有値 -3 に関する固有ヴェクターを求めるますが、それは $(B+3E)\mathbb{v}=\mathbb{o}$ となるヴェクター $\mathbb{v}$ を求める事であり、具体的に書けば

$$\begin{cases} 4x+2y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

を満たすヴェクター $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めます。

よく見ればこの２式は同じ式ですから、例えば $y=-2x$ であり、従って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

が得られるので求める固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ です。

次に固有値 2 に関する固有ヴェクターを求めますが、それは $(B-2E)\mathbb{v}=\mathbb{o}$ となるヴェクター $\mathbb{v}$ を求める事であり、具体的に書けば

$$\begin{cases} -x+2y=0 \\ 2x-4y=0 \end{cases}$$

を満たすヴェクター $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めます。

よく見ればこの２式は同じ式ですから、例えば $x=2y$ であり、従って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られるので求める固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

最後に不動直線を求めましょう。

不動直線の方向ヴェクターは 0 でない固有値に関する固有ヴェクターでなければならないため、この場合その可能性は $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ か $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のいずれかしかありません。

従って不動直線は

$$y=-2x+k, \qquad y=\frac{1}{2}x+k$$

の型のものに限られます。(1) と同様の計算によれば（略）いずれの場合も $k=0$ でなければ不動直線ではないので、求める不動直線は次の２本です：

$$y=-2x, \qquad y=\frac{1}{2}x.$$

(3) まず固有値と固有ヴェクターを求めます。

$$0=|C-xE|=\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix}=(x-2)^2-1$$

となるので固有値は $1,3$ です。

次に固有値 1 に関する固有ヴェクターを求めますが、それは $(B-E)\mathbb{v}=\mathbb{o}$ となるヴェクター $\mathbb{v}$ を求める事であり、具体的に書けば

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

を満たすヴェクター $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めることになります。

$y=-x$ から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が得られるので求める固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ です。

次に固有値 3 に関する固有ヴェクターを求めます。これは $(B-3E)\mathbb{v}=\mathbb{o}$ となるヴェクター $\mathbb{v}$ を求める事であり、具体的に書けば

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

を満たすヴェクター $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求ます。

$y=x$ から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られるので求める固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

不動直線の方向ヴェクターは 0 でない固有値に関する固有ヴェクターでなければならないため、少なくとも

$$y = -x + k, \qquad y = x + k$$

の２つの型のものに限られます。

まず直線 $y = -x + k$ が不動直線であると仮定すると、少なくともこの直線上の点 $(0, k)$ の像 $(k, 2k)$ はまたこの直線上になければならず、$k = 0$ であることが分かります。逆に直線 $y = -x$ 上の任意の点 $(t, -t)$ はこの一次変換で動きませんから確かにこの直線は不動直線です。

直線 $y = x + k$ 上の点 $(t, t + k)$ の移り先は $(3t + k, 3t + 2k)$ であり、これは任意の t, k に対して $y = x + k$ を満たしています。従ってこの型の直線は任意の k で不動直線です。

以上により、不動直線は

$$y = -x, \qquad y = x + k \quad (k \text{ は任意})$$

です。 □

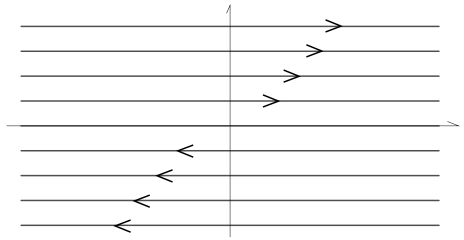
> **基本演習 4** 固有値が 1 のみ（重根）で、固有ヴェクターが 1 本しかない場合は、1 次変換はどんな様子になるでしょうか。行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の場合に計算してください。

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ですから、(x_0, y_0) から出発すると

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + ny_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、点は直線 $y = y_0$ 上を右に、あるいは左に無限遠方へ進んで行きます。



平面全体を俯瞰すると、上半平面の点は右に流れ、下半平面の点は左に流れて行きます。x 軸近辺が流れが弱く、軸から離れるに従って流れは速くなって行きます。x-軸上の点は停滞し動きません。 □

> **基本演習 5** ３本の直線 l_1, l_2, l_3 はどの２本も１点のみで交わり、３本が１点で交わってはいないものとします。ある２次正方行列 M の表す１次変換によってこれら３本がそれぞれ不動直線であるとき、この１次変換による不動直線を全て求めて下さい。

【解答例　その１】　不動直線の方向ヴェクターは M の固有ヴェクターであり、また２次の正方行列 M の相異なる固有値は最大でも２個ですから、l_1, l_2, l_3 の方向ヴェクターのうち少なくとも２本は同じ固有値に対応した固有ヴェクターです。

これは平行でない２本のヴェクターが同じ固有値の固有ヴェクターになっていることを意味し、任意のヴェクターはこの２本の一次結合によって書き表すことが出来ることを考えれば、任意のヴェクターが同一の固有値に関する固有ヴェクターであることが分かります。その固有値を p とすると特に

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$$

ですからこれらを合わせて

$$M = ME = \left(M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = pE$$

となって行列 M は単位行列の定数倍であることが分かります。

また、３本の不動直線 l_1, l_2, l_3 のうち少なくとも１本は原点を通りませんが、単位行列の p 倍の表す１次変換によって原点と直線の距離は $|p|$ 倍に広がり、更に $p<0$ の場合は原点対称に移動してしまいますから、原点を通らない直線が不動であるためには $p=1$、すなわち行列 M は単位行列でなければなりません。

以上から不動直線は任意の直線です。

【解答例　その２】　各直線の交点はまた交点に移らねばならないため、不動点です。従って不動点で同一直線上にないものが３つあります。これはこの一次変換がすべての点を動かさないことを意味し、従って任意の直線が不動直線です。 □

基本演習 6 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ のとき

$$A^n=\begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$$

となることを示してください。

数学的帰納法ならすぐです。 □

基本演習 7 2 次正方行列 A が２つの異なる固有値 λ_1, λ_2 をもつとき、

$$A^n=\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}A+\frac{\lambda_1\lambda_2^n-\lambda_1^n\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}E$$

となることを示してください。

【解答例その１】　λ_1, λ_2 に対応した固有ヴェクターを $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$ とします。これらは平行ではありません。

平行でない２つのヴェクターの移り先が同じであれば行列として同じであることが分かりますのでそれを調べます。

$$\left\{\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}A+\frac{\lambda_1\lambda_2^n-\lambda_1^n\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}E\right\}\mathbb{v}_1=\left\{\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1+\frac{\lambda_1\lambda_2^n-\lambda_1^n\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\right\}\mathbb{v}_1=\lambda_1^n\mathbb{v}_1,$$

$$\left\{\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}A+\frac{\lambda_1\lambda_2^n-\lambda_1^n\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}E\right\}\mathbb{v}_2=\left\{\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2+\frac{\lambda_1\lambda_2^n-\lambda_1^n\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\right\}\mathbb{v}_2=\lambda_2^n\mathbb{v}_2,$$

以上により題意は示されました。

【解答例その２】　帰納法によって証明します。$n=1$ の時、確かに成り立っています。$n=k$ で成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned}A^{k+1}&=A\left\{\frac{\lambda_1^k-\lambda_2^k}{\lambda_1-\lambda_2}A+\frac{\lambda_1\lambda_2^k-\lambda_1^k\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}E\right\}\\&=\frac{\lambda_1^k-\lambda_2^k}{\lambda_1-\lambda_2}A^2+\frac{\lambda_1\lambda_2^k-\lambda_1^k\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}A\end{aligned}$$

ですが、ここで固有値が固有方程式の解であることと Hamilton-Cayley の定理から

$$A^2-(\lambda_1+\lambda_2)A+\lambda_1\lambda_2E=O$$

が成り立つことが分かるので

$$\begin{aligned}&=\frac{\lambda_1^k-\lambda_2^k}{\lambda_1-\lambda_2}\{(\lambda_1+\lambda_2)A-\lambda_1\lambda_2E\}+\frac{\lambda_1\lambda_2^k-\lambda_1^k\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}A\\&=\frac{\lambda_1^{k+1}-\lambda_2^{k+1}}{\lambda_1-\lambda_2}A+\frac{\lambda_1\lambda_2^{k+1}-\lambda_1^{k+1}\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}E\end{aligned}$$

となって、$n=k+1$ でも成り立つことが分かります。

以上から、数学的帰納法により題意は示されました。 □

基本演習 8 ２次正方行列 M は対称行列であって $|M|=1$ であるとします。このとき M^2 の表す一次変換によって平面内の点はどのように流れるか考えて下さい。

M^2 も対称行列であって、M^2 の固有値は M の固有値の自乗になりますから正の実数です。固有値が 1 つしかない場合は、固有値の積が行列式でしたから、固有値は 1（重解）であり、対応した固有ヴェクターは 2 次元分出てきますから、これは $M^2=E$ の場合であることがわかります。

固有値が 2 つある場合は固有値の一方は１より小さく、他方は１より大きいことも分かり、また対応する固有ヴェクターは直交します。

従って直交する２直線を漸近線とする双曲線に沿って点が流れてゆくことが分かります。 □

基本演習 9 2 次正方行列 M が $M \neq O, M \neq E$ であって $M^2 = M$ であるとき、M の表す一次変換によって平面内の点はどのように流れるでしょうか。

$M^2 = M$ ですから、Cayley-Hamilton の定理により、

$$M^2 - (m_{11}+m_{22})M + (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})E = O$$
$$(m_{11}+m_{22}-1)M = (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})E$$

ですが、もしも $M = kE$ であった場合、

$$M^2 = k^2E = kE = M$$

から $k = 1$ でなければならず、これは仮定に反します。従って M は単位行列の定数倍ではなく、

$$m_{11}+m_{22} = 1, \quad m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = |M| = 0$$

でなければなりません。従って M は固有値 0 をもちますが、固有値 0 に対応した固有ヴェクターが 2 次元分ある場合は $M = O$ となりこれも仮定に反しますから、固有値 0 に対応した固有ヴェクターは 1 次元分しかありません。

固有値の和は $m_{11}+m_{22} = 1$ ですから、M はもう 1 つの固有値 1 ももち、対応した固有ヴェクターが 1 次元分あります。

従って平面内の点の流れは、原点を通り固有値 1 に対応した固有ヴェクター方向の直線に向かった、固有値 0 に対応した固有ヴェクター方向の射影になります。 □

発展演習 10 固有値がない場合は 1 次変換はどんな様子になるでしょうか。

例えば $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ のとき、固有方程式は

$$0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 + \frac{1}{4}$$

ですから固有値はありません。

ただし、『実固有値』はなくても『複素固有値』はあり、『複素固有ヴェクター』が存在します。実際、

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ \pm 2i \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ \pm 2i \end{pmatrix}$$

が成り立っています。そこで出発点を

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = R_+\begin{pmatrix} 3 \\ 2i \end{pmatrix} + R_-\begin{pmatrix} 3 \\ -2i \end{pmatrix}$$

と分解出来たとすると（これは必ず出来ます。ただし $R_\pm$ は複素数ですが）、$p_\pm = \frac{\sqrt{3}\pm i}{2}$ として

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = R_+p_+^n\begin{pmatrix} 3 \\ 2i \end{pmatrix} + R_-p_-^n\begin{pmatrix} 3 \\ -2i \end{pmatrix}$$

となるわけですから、

$$\begin{cases} \frac{x_n}{3} = R_+p_+^n + R_-p_-^n \\ \frac{y_n}{2i} = R_+p_+^n - R_-p_-^n \end{cases}$$

から

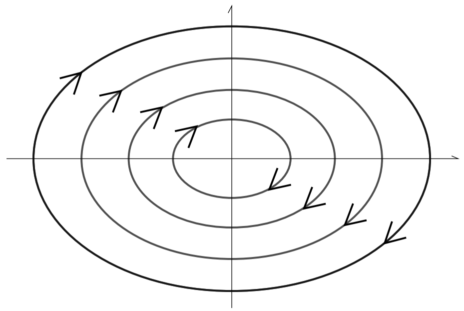
$$\frac{x_n}{3} + \frac{y_n}{2i} = 2R_+p_+^n, \quad \frac{x_n}{3} - \frac{y_n}{2i} = 2R_-p_-^n$$

となって $p_+p_- = 1$ に注意して

$$\left(\frac{x_n}{3} + \frac{y_n}{2i}\right)\left(\frac{x_n}{3} - \frac{y_n}{2i}\right) = 4R_+R_-$$
$$\frac{x_n^2}{9} + \frac{y_n^2}{4} = \text{（定数）}$$

が得られます。定数部分は、この式が $n = 0$ の場合にも成り立っていることから $\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4}$ であることが分かります。

従って点 (x_n, y_n) は常に楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4}$ 上にあることが分かります。



この一次変換によって点は楕円上を時計回りに回転し、$A^6 = -E, A^{12} = E$ が示す様に、6 回で半周、12 回で１周します。ちょうど $-\frac{\pi}{6}$ だけ回転していることに対応しています。実際、

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ですから、まず $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ で楕円から円に移して、円上で $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ によって $-\frac{\pi}{6}$ 回転し、更に $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ によって楕円に戻している感じですね。

明らかに不動直線はありません。 □

発展演習 11 2 次正方行列 M の表す一次変換で不動な直線について、固有値・固有ヴェクターの様子で分類して考えてみて下さい。

固有値	固有ヴェクター	不動直線
なし		なし
$0, 0$		なし
$0, p$		$\mathbb{x} = t\mathbb{v}_p$
$1, 1$	２本	任意の直線
	１本	$\mathbb{x} = \mathbb{a} + t\mathbb{v}_1$　($\mathbb{a}$ は任意)
p, p	２本	任意の原点を通る直線
	１本	$\mathbb{x} = t\mathbb{v}_p$
$1, p$		$\mathbb{x} = t\mathbb{v}_1$, $\mathbb{x} = \mathbb{a} + t\mathbb{v}_p$　($\mathbb{a}$ は任意)
p, r		$\mathbb{x} = t\mathbb{v}_p$, $\mathbb{x} = t\mathbb{v}_r$

ただし、$p, r \neq 0, 1$ であり、$p \neq r$. □

発展演習 12 一般に 2 次正方行列 A が２つの異なる正の固有値 p_1, p_2 をもつとき、どんな曲線が不動曲線となるか考えてみてください。

研究課題ですな。