

2次元一次変換による点の流れ

1 一次変換による点の流れ

点 (x_0, y_0) から出発して、一次変換 A によって次々と点を動かしていくとき、それらの点はどんな曲線を描くでしょうか。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots$$

1.1 簡単な例 その1

特に簡単な行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ の場合は

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n x_0 \\ 9^n y_0 \end{pmatrix}$$

ですから一般に $x_0, y_0 \neq 0$ であれば

$$\left(\frac{x_n}{x_0} \right)^2 = \frac{y_n}{y_0}$$

が成り立っており、点 (x_n, y_n) は常に曲線

$$y = \frac{y_0}{x_0^2} x^2$$

上にあることが分かります。正確には $x_0 > 0$ であれば上記放物線の $x > 0$ に対応する部分、などとなります。

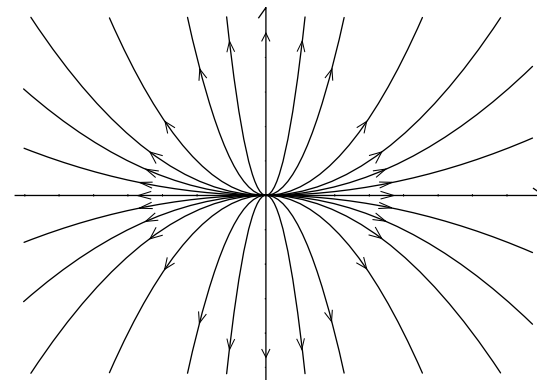
$(x_0, y_0) = (0, 0)$ であれば、明らかに $(x_n, y_n) = (0, 0)$ のままで点は動きません。

もしも $x_0 = 0, y_0 \neq 0$ であれば、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9^n y_0 \end{pmatrix}$$

ですから、点は常に y -軸上にあることが分かります。全く同様に $x_0 \neq 0, y_0 = 0$ の場合は、点は常に x -軸上にあります。

以上から、行列 A の表す一次変換が平面内の点をどのように移動させるか全体像が見えてきます：



原点を中心に放射線状に外へ外へ点が移動していく様子がわかるでしょうか。 y -座標の大きくなり方の方が x -座標の大きくなり方より早いこともわかるでしょう。

1.2 簡単な例 その2

また、別の行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ の場合は

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} x_0 \\ 2^n y_0 \end{pmatrix}$$

ですから一般に

$$x_n y_n = x_0 y_0$$

が成り立っており、点 (x_n, y_n) は曲線

$$xy = x_0 y_0$$

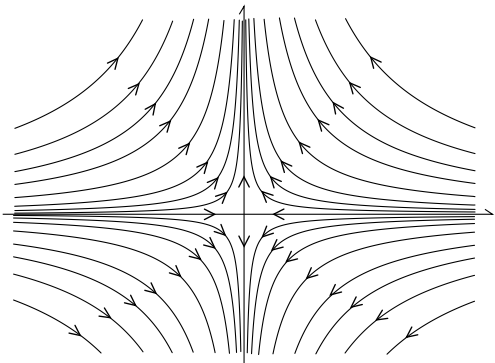
上にあることが分かります。

$(x_0, y_0) = (0, 0)$ であれば、明らかに $(x_n, y_n) = (0, 0)$ のままで点は動きません。

もしも $x_0 = 0, y_0 \neq 0$ であれば、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2^n y_0 \end{pmatrix}$$

ですから、点は常に y -軸上にあり、無限遠方へ移動して行きます。全く同様に $x_0 \neq 0, y_0 = 0$ の場合は、点は常に x -軸上にあり、原点の方へ向かって移動します。



今回の行列 A の表す一次変換の全体像はちょっと違ってきます (左図)。

x -軸上では原点に向かい、 y -軸上では無限遠方に向かっており、それにつられてその他の領域では双曲線の上を移動していることが分かります。

1.3 固有値・固有ベクトルとの関係

行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$ でも同じことを考えます。固有値は $\frac{1}{2}, 2$ の 2 つであり、固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

出発点を (x_0, y_0) としますが、これを固有ベクトルを使って

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y_0 - x_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と分解しておきます。すると、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^n \left\{ x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y_0 - x_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = x_0 \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y_0 - x_0) 2^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

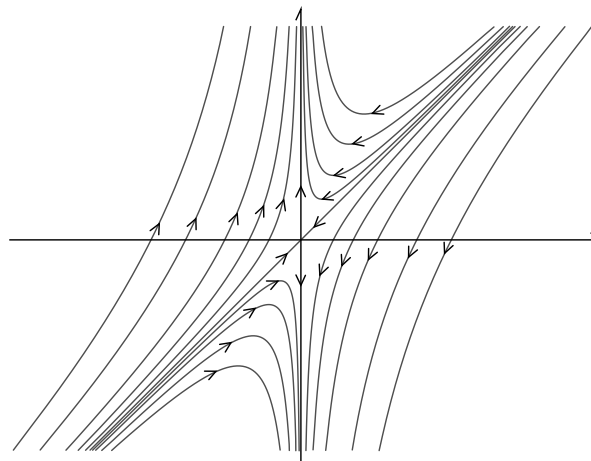
ですから、 $x_0 \neq 0, x_0 \neq y_0$ であれば (これはつまり出発点の位置ベクトルが固有ベクトルでないと云う条件です)

$$\frac{x_n}{x_0} = 2^{-n}, \quad \frac{y_n - x_n}{y_0 - x_0} = 2^n$$

が成り立っています。従って点 (x_n, y_n) は曲線

$$x(y - x) = x_0(y_0 - x_0)$$

上にあることが分かります。



$(x_0, y_0) = (0, 0)$ の場合はやはり点は動きませんし、 $x_0 = 0, y_0 \neq 0$ の場合は点は原点から遠ざかって無限遠点の方へ向かって行きます。 $x_0 = y_0, x_0 \neq 0$ の場合は点は原点に向かって行きます。

この様に、出発点 (の位置ベクトル) が固有ベクトルである場合は、点は直線上を動くことになり、対応する固有値が正で 1 より小さければ原点に向かい、1 より大きければ無限遠方へ向かいます。

この時、原点を通り固有ベクトルに平行な直線上の点はこの一次変換で同じ直線上に移され、直線上の全ての点の移り先の全体はまたその直線自身になっています。このような状況を指して、この直線はこの一次変換における不動直線である、と言います。今見た 3 つの例ではいずれも不動直線が 2 本 (のみ) ありました。

また、最初の例における放物線や、次の例での双曲線、最後の例に出てきた『ひしゃげた双曲線』も、曲線上の点の移り先全体がまた自分自身になっており、こういった曲線は『不動曲線』とも呼ばれます。

1.4 固有値 1 をもつ場合

行列 A が固有値 1 をもち、更に対応する固有ベクトルが 2 次元あった場合、任意のベクトルが固有ベクトルであることになってしまい、これはつまり一切のベクトルを動かさないことを意味します。この場合行列 A は単位行列でしかあり得ません。

2 次正方行列の固有方程式は実数係数の 2 次方程式ですから、固有値 1 がある場合、それは重解であるか、もしくはもう一つ別の固有値があるか、どちらかです。

そこでまずはもう一つ別の (正の) 固有値がある場合を考えましょう。

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は 1, 2 であり、固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

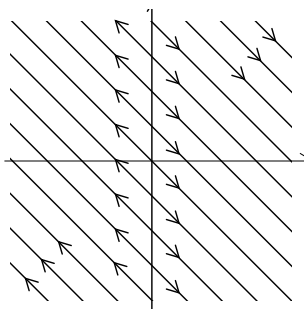
出発点 (x_0, y_0) を

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (x_0 + y_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - x_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と分解すれば、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \left\{ (x_0 + y_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - x_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = (x_0 + y_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - x_0 2^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ですから任意の n に対して $x_n + y_n = x_0 + y_0$ が成り立っており、従って点 (x_n, y_n) は常に直線 $y = -x + x_0 + y_0$ の上にあることが分かります。



今回は原点のみならず、 y -軸上の任意の点が動きません。従って y -軸は不動直線です。

また、任意の点 (x_0, y_0) を通る傾き -1 の直線 $y = -x + x_0 + y_0$ も不動直線になっていますが、これらは内部で無限遠方へ動いています。もし 1 以外の固有値が 1 より小さければ、無限遠方ではなくこの直線上の不動点 $(0, x_0 + y_0)$ に向かって行くでしょう。

1.5 固有ベクトルが足りない場合

固有値が重解であって固有ベクトルが 1 次元分しかない場合はどうなるのでしょうか。まずは固有値が 1 より大きい場合です。

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ の表す一次変換を考えます。固有値は 2 のみで、固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の 1 本だけしかありません。計算によれば

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

ですから

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n x_0 + n2^{n-1} y_0 \\ 2^n y_0 \end{pmatrix}$$

であって、 $y_0 \neq 0$ であれば

$$\frac{y_n}{y_0} = 2^n \quad \text{従って} \quad n = \log_2 \frac{y_n}{y_0}$$

が分かります。

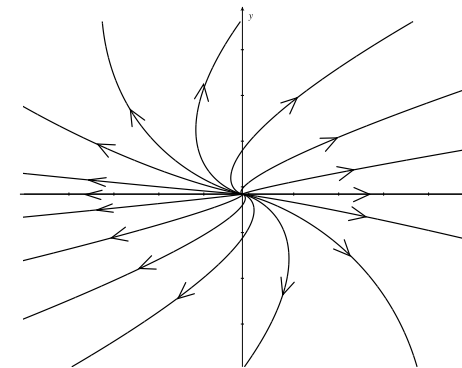
更に

$$x_n = y_n \left(\frac{x_0}{y_0} + \frac{\log \frac{y_n}{y_0}}{2 \log 2} \right)$$

となりますから、点 (x_n, y_n) は常に曲線：

$$x = y \left(\frac{x_0}{y_0} + \frac{\log \frac{y}{y_0}}{2 \log 2} \right)$$

の上にあります。

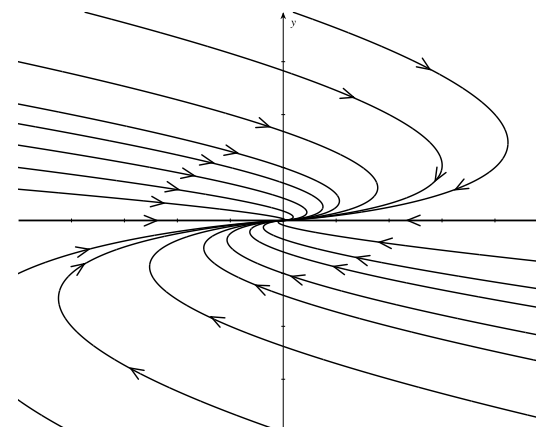


この場合、 x -軸が不動直線であり（無限遠方へ広がっています）、 x -軸上にない出発点からスタートすると図の様に曲がりながら無限遠方へと移って行きます。

固有値が正で 1 より小さい場合も同様に計算できます。行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ の場合、点 (x_0, y_0) から出発すると、点 (x_n, y_n) は一般に曲線：

$$x = y \left(\frac{x_0}{y_0} - \frac{2 \log \frac{y}{y_0}}{\log 2} \right)$$

上にあります。 x -軸が唯一の不動直線であり、内部では原点へ向かって移動しています。



1.6 不動直線の方方向ベクター

点 a を通り、ベクター $v \neq \mathbf{0}$ に平行な直線: $x = a + tv$ (t はパラメーター) が一次変換 M で不動であるとき、 Mx を計算してみると

$$Mx = Ma + tMv$$

となりますね。パラメーター t にいろいろな値を入れれば直線上の全ての点の像がこれで求まったわけですが、 Mv がゼロベクターでなければこの像はまた直線になっている事が分かります。

元の直線が一次変換 M で自分自身に移ると仮定すると、少なくともこれらの直線の方方向ベクターは平行でなければなりません。すなわちある定数 p が存在して

$$Mv = pv$$

となっていなければなりません ($Mv \neq \mathbf{0}$ なので p も 0 ではない)、これは即ち、 v が M の固有ベクターである事を示しています。

必要条件その 1: 直線の方方向ベクター v は、 M の、0 でない固有値 p に対応した固有ベクターでなければならない。

もしも $Mv = \mathbf{0}$ ならば (すなわち、 v は M の固有値 0 に対応した固有ベクターであるならば)、元の直線の像は Ma 1 点となってしまいますし、そもそも固有ベクターでなかったら、像は直線ですが方向の違った直線になってしまいます。

Exercise

基本演習 1 行列 $C = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{7}{2} \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えてください。

- (1) C の固有値・固有ベクターを求めてください。
- (2) C の表す 1 次変換によって平面内の点がどのように動くか図示してください。

基本演習 2 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の表す一次変換によって直線 $y = -x + k$ は自分自身に移るそうです。さて k の値は何でしょうか。

基本演習 3 次の各行列の表す一次変換で自分自身に移る直線を全て求めて下さい。

$$(1) \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

基本演習 4 固有値が 1 のみ (重根) で、固有ベクターが 1 本しかない場合は、1 次変換はどんな様子になるでしょうか。行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の場合に計算してください。

基本演習 5 3 本の直線 l_1, l_2, l_3 はどの 2 本も 1 点のみで交わり、3 本が 1 点で交わってはいないものとします。ある 2 次正方行列 M の表す 1 次変換によってこれら 3 本がそれぞれ不動直線であるとき、この 1 次変換による不動直線を全て求めて下さい。

基本演習 6 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ となることを示してください。

基本演習 7 2 次正方行列 A が 2 つの異なる固有値 λ_1, λ_2 をもつとき、

$$A^n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} A + \frac{\lambda_1 \lambda_2^n - \lambda_1^n \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} E$$

となることを示してください。

基本演習 8 2 次正方行列 M は対称行列であって $|M| = 1$ であるとしします。このとき M^2 の表す一次変換によって平面内の点はどのように流れるか考えて下さい。

基本演習 9 2 次正方行列 M が $M \neq O, M \neq E$ であって $M^2 = M$ であるとき、 M の表す一次変換によって平面内の点はどのように流れるのでしょうか。

発展演習 10 固有値がない場合は 1 次変換はどんな様子になるのでしょうか。

発展演習 11 2 次正方行列 M の表す一次変換で不動な直線について、固有値・固有ベクターの様子で分類して考えてみて下さい。

発展演習 12 一般に 2 次正方行列 A が 2 つの異なる正の固有値 p_1, p_2 をもつとき、どんな曲線が不動曲線となるか考えてみてください。