総復習

1　固有値・固有ヴェクターの理解確認問題

基本演習 1 正方行列 M が正則でないことと、固有値 0 をもつことが同値であることを証明してください。

基本演習 2 $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ の固有方程式（２次方程式）の２つの解 λ_1,λ_2 に対して（重解すなわち $\lambda_1=\lambda_2$ の場合も含めて）、

$$\lambda_1\cdot\lambda_2=m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21},\quad \lambda_1+\lambda_2=m_{11}+m_{22}$$

であることを示して下さい。

基本演習 3 2 次正方行列 M の固有値は 2 のみであって、２つの平行でない固有ヴェクター $\mathbb{v},\mathbb{w}$ が存在します。このとき M を求めてください。

基本演習 4 M^2 は固有値をもつが、M は固有値をもたない 2 次正方行列 M の例を挙げてください。

基本演習 5 2 次正方行列 M の固有値が $2,3$ であるとき、M^2、M^{-1} の固有値をそれぞれ求めてください。

基本演習 6 $f(x)$ は多項式であるとし、2 次正方行列 M の固有値が $2,3$ であるとき、$f(x)$ の x のところに形式的に行列 M を代入して得られる行列 $f(M)$ の固有値を求めてください。

基本演習 7 $\mathbb{v},\mathbb{w}$ は 2 次元の縦ヴェクター、A は２次正方行列であるとします。$P=\begin{pmatrix}\mathbb{v} & \mathbb{w}\end{pmatrix}$ として $P^{-1}AP$ が対角行列であるとき、$\mathbb{v},\mathbb{w}$ は A の固有ヴェクターであることを証明してください。

基本演習 8 $M^2=M$ を満たす２次対称行列 M が固有値 0 をもち、対応する固有ヴェクターが $\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ のみであるとき、M を求めて下さい。

基本演習 9 ２次正方行列 M は単位行列の定数倍ではなく、固有値 1 をもちません。また関係式：

$$M^3-6M^2+11M-6E=O$$

が成り立っています。このとき M の固有値を求めて下さい。

2　空間の諸問題

基本演習 10 四面体 $OABC$ の辺 OA,AB,BC,OC,OB,AC の中点を K,L,M,N,P,Q とするとき、次のことを証明してください。

(1) 四角形 $KLMN$ は平行四辺形である。

(2) 直線 KM,LN,PQ は１点で交わる。

基本演習 11 四面体 $OABC$ において、$OA\perp BC, OB\perp AC$ であるとき、次のことを証明してください。

(1) $OC\perp AB$

(2) $OA^2+BC^2=OB^2+AC^2=OC^2+AB^2$

基本演習 12 正四面体 $OABC$ の相対する辺、たとえば OA と BC、は互いに垂直であることを証明してください。

発展演習 13 四面体 $TABC$ の内部に点 P があって、

$$\overrightarrow{TP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{TA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{TB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{TC}$$

が成り立っているとき、以下の問いに答えてください。

(1) 直線 TP と平面 ABC の交点を Q とするとき、$\overrightarrow{TQ}$ を $\overrightarrow{TA},\overrightarrow{TB},\overrightarrow{TC}$ を用いて表してください。

(2) 直線 AQ と辺 BC の交点 D に対して、$BD:DC$ を求めてください。

(3) $\triangle QCA$ の面積を S_2、$\triangle QAB$ の面積を S_3 とするとき、$S_2:S_3$ を求めてください。

(4) 四面体 $PTAC$ の体積を V_2、四面体 $PTAB$ の体積を V_3 とするとき、$V_2:V_3$ を求めてください。

(5) 四面体 $PABC,PTBC$ の体積をそれぞれ V_0,V_1 とするとき、$V_0:V_1:V_2:V_3$ を求めてください。

(6) $V_0\overrightarrow{PT}+V_1\overrightarrow{PA}+V_2\overrightarrow{PB}+V_3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立つことを示してください。

発展演習 14 四面体 $OABC$ において、線分 AB の中点を P、線分 CP を $1:2$ の比に内分する点を Q、線分 OQ を $1:2$ の比に内分する点を R とします。また３点 O,B,C を通る平面と直線 AR の交点を S、直線 OS と直線 BC の交点を T とします。

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき、$\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて表してください。

(2) 四面体 $OABC$ の体積 V_1 と、四面体 $PQST$ の体積 V_2 の比 $V_1:V_2$ を求めてください。

3　令和５年度後学期定期試験

1

$$M=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=M^n\begin{pmatrix}6\\ 0\end{pmatrix}\quad (n=0,1,2,\dots)$$

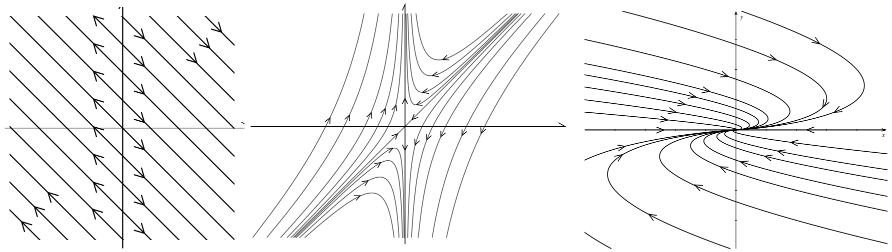
として以下の問いに答えてください（$M^0=E$ とします)。

(1) 行列 M の固有値・固有ヴェクターを求めて下さい。

(2) 行列 M を対角化し、M^n を求めて下さい。

(3) 点 (x_n,y_n) を P_n とするとき点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ は収束するでしょうか？　するかしないか答え、更に収束する場合には極限点も求めて下さい。収束しない場合にはしない理由も述べて下さい。

(4) M の表す 1 次変換によって平面内の点がどの様に動くか、上の結果と講義で学んだ知識から予想されることを、他の行列の場合の例（下図）を参考にして図示してください。



2 Pell's 方程式 $x^2-3y^2=1$ の正の整数解を 3 組求めて下さい。

3 次の行列の逆行列をはき出し法で求めてください。

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

4 漸化式：

$$\begin{cases}a_{n+1}=5a_n-b_n\\ b_{n+1}=6a_n-2b_n\end{cases},\quad a_0=1,\ b_0=1$$

を満たす数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を求めて下さい。

5 次の行列式を計算して下さい。(2) は因数分解してください。

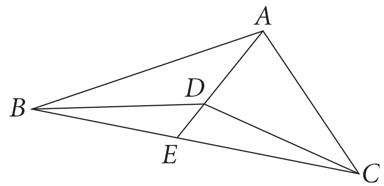
(1) $\begin{vmatrix}12 & 11 & 5\\ 6 & 10 & 8\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix}1 & a^2 & (b+c)^2\\ 1 & b^2 & (c+a)^2\\ 1 & c^2 & (a+b)^2\end{vmatrix}$

6 $\triangle ABC$ の内部に点 D があって、

$$3\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$$

が成り立っているとします。

このとき直線 AD と辺 BC の交点 E は辺 BC をどんな比で内分するでしょうか。BE : EC を答えて下さい。



7 行列 $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 1 & 4 & 2\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$ について以下の問いに答えてください。

(1) A の固有値を全て求めてください。

(2) A の最大の固有値について固有ヴェクターを求めて下さい。

固有値・固有ヴェクターの理解確認問題　解答例

基本演習 1 正方行列 M が正則でないことと、固有値 0 をもつことが同値であることを証明してください。

M が正則であることは M の行列式 $|M|$ が 0 でないことと同値でしたから、M が正則でないことは、$|M|=0$ と同値であり、これはまた

$$0=|M|=|M-0E|$$

とも書けますから、M の固有方程式 $|M-xE|=0$ が $x=0$ を解にもつことと同値です。

固有方程式の実数解を固有値と呼びましたから、これは従って、M が固有値 0 をもつことと同値であることが分かります。 □

基本演習 2 $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ の固有方程式（２次方程式）の２つの解 λ_1, λ_2 に対して（重解すなわち $\lambda_1=\lambda_2$ の場合も含めて）、

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}, \quad \lambda_1+\lambda_2 = m_{11}+m_{22}$$

であることを示して下さい。

M の固有方程式は

$$0=|M-xE|=\begin{vmatrix} m_{11}-x & m_{12} \\ m_{21} & m_{22}-x \end{vmatrix} = x^2-(m_{11}+m_{22})x+m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}$$

ですから、解と係数の関係により

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}, \quad \lambda_1+\lambda_2 = m_{11}+m_{22}$$

です。 □

基本演習 3 2 次正方行列 M の固有値は 2 のみであって、２つの平行でない固有ヴェクター $\mathbb{v}, \mathbb{w}$ が存在します。このとき M を求めてください。

任意の２次元ヴェクターは２つの平行でないヴェクター $\mathbb{v}, \mathbb{w}$ の１次結合で書けますから、任意の（ゼロヴェクターでない）２次元ヴェクターは M の固有値 2 に関する固有ヴェクターであることが分かります。

従って任意のヴェクター $\mathbb{x}$ に対して

$$M\mathbb{x}=2\mathbb{x}$$

が成り立っており、これは $M=2E$ を意味します。

【別解】 $P=\begin{pmatrix} \mathbb{v} & \mathbb{w} \end{pmatrix}$ と置けば、$\mathbb{v}, \mathbb{w}$ は平行ではないので P は正則です。すると

$$\begin{aligned} MP &= \begin{pmatrix} M\mathbb{v} & M\mathbb{w} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\mathbb{v} & 2\mathbb{w} \end{pmatrix} \\ &= 2P \\ MPP^{-1} &= 2PP^{-1} \\ M &= 2E \end{aligned}$$

です。 □

基本演習 4 M^2 は固有値をもつが、M は固有値をもたない 2 次正方行列 M の例を挙げてください。

例えば $\frac{\pi}{2}$ の回転行列 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ など。 □

基本演習 5 2 次正方行列 M の固有値が $2, 3$ であるとき、M^2、M^{-1} の固有値をそれぞれ求めてください。

M の、固有値 $2,3$ に関する固有ヴェクターをそれぞれ $\mathbb{v},\mathbb{w}$ とします。

$$\begin{aligned} M\mathbb{v} &= 2\mathbb{v} \\ M^2\mathbb{v} &= M(2\mathbb{v}) = 4\mathbb{v} \\ M\mathbb{w} &= 3\mathbb{w} \\ M^2\mathbb{w} &= M(3\mathbb{w}) = 9\mathbb{w} \end{aligned}$$

従って M^2 の固有値は $4,9$ です。また、

$$\begin{aligned} M\mathbb{v} &= 2\mathbb{v} \\ \mathbb{v} &= 2M^{-1}\mathbb{v} \\ \frac{1}{2}\mathbb{v} &= M^{-1}\mathbb{v} \\ M\mathbb{w} &= 3\mathbb{w} \\ \mathbb{w} &= 3M^{-1}\mathbb{w} \\ \frac{1}{3}\mathbb{w} &= M^{-1}\mathbb{w} \end{aligned}$$

から、M^{-1} の固有値は $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ です。 □

基本演習 6 $f(x)$ は多項式であるとし、2 次正方行列 M の固有値が $2,3$ であるとき、$f(x)$ の x のところに形式的に行列 M を代入して得られる行列 $f(M)$ の固有値を求めてください。

$f(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ とすると $f(M)=\sum_{j=0}^{n} a_j M^j$ です（$M^0=E$）。M の固有値 k に関する固有ヴェクターを $\mathbb{v}_k$ とすると、

$$f(M)\mathbb{v}_k = \sum_{j=0}^{n} a_j M^j \mathbb{v}_k = \sum_{j=0}^{n} a_j k^j \mathbb{v}_k = f(k)\mathbb{v}_k$$

となるので、$\mathbb{v}_k$ は $f(M)$ の固有値 $f(k)$ に関する固有ヴェクターです。以上から、$f(M)$ の固有値は $f(2),f(3)$ ですね。 □

基本演習 7 $\mathbb{v},\mathbb{w}$ は 2 次元の縦ヴェクター、A は２次正方行列であるとします。$P=\begin{pmatrix}\mathbb{v} & \mathbb{w}\end{pmatrix}$ として $P^{-1}AP$ が対角行列であるとき、$\mathbb{v},\mathbb{w}$ は A の固有ヴェクターであることを証明してください。

まず P^{-1} が存在していることから、$\mathbb{v},\mathbb{w}$ はともにゼロヴェクターではないことに注意します。

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ AP &= P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix}\mathbb{v} & \mathbb{w}\end{pmatrix} &= P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}A\mathbb{v} & A\mathbb{w}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} & P\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aP\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & bP\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\begin{pmatrix}\mathbb{v} & \mathbb{w}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & b\begin{pmatrix}\mathbb{v} & \mathbb{w}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}a\mathbb{v} & b\mathbb{w}\end{pmatrix} \end{aligned}$$

によれば

$$M\mathbb{v} = a\mathbb{v}, \quad M\mathbb{w} = b\mathbb{w}$$

ですから、確かに題意は成立します。 □

基本演習 8 $M^2=M$ を満たす２次対称行列 M が固有値 0 をもち、対応する固有ヴェクターが $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ のみであるとき、M を求めて下さい。

M は対称行列なので、（実）固有値を重複度込みで２つもちます。仮に l が M の固有値、$\mathbb{v}$ が対応する固有ヴェクターであった場合、$M^2 = M$ であることから、

$$l^2\mathbb{v} = M^2\mathbb{v} = M\mathbb{v} = l\mathbb{v}$$

となって $\mathbb{v} \neq \mathbb{o}$ であることから $l^2 = l$、つまり l は 0 か 1 であることが分かります。

また、２次対称行列は必ず固有ヴェクターを 2 本（２次元分）もちますから、問題文から 0 以外の固有値があり、従って固有値 1 をもつことが分かります。

対称行列の、異なる固有値に対応する固有ヴェクター同士は直交しますから、固有値 1 に対応する固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ であることが分かり、従って、

$$\begin{aligned}
\left(M\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad M\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
M\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
M &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が分かります。　□

基本演習 9　２次正方行列 M は単位行列の定数倍ではなく、固有値 1 をもちません。また関係式：

$$M^3 - 6M^2 + 11M - 6E = O$$

が成り立っています。このとき M の固有値を求めて下さい。

関係式は

$$(M - E)(M^2 - 5M + 6E) = O$$

と因数分解されますが、M は固有値 1 をもたないので $|M - E| \neq 0$ であって $(M - E)^{-1}$ が存在しますからこれを両辺に左から掛ければ

$$M^2 - 5M + 6E = O$$

が分かります。これも

$$(M - 2E)(M - 3E) = O$$

と因数分解されますから、任意のヴェクター $\mathbb{v}$ に対して

$$(M - 2E)\{(M - 3E)\mathbb{v}\} = \mathbb{o}$$

が成り立っています。

ここで任意の $\mathbb{v}$ に対して $(M - 3E)\mathbb{v} = \mathbb{o}$ であれば M は固有値 3 に関する固有ヴェクターを 2 次元分もってしまい、$M = 3E$ であることになってしまうので、問題の仮定から $(M - 3E)\mathbb{v} \neq \mathbb{o}$ となるような $\mathbb{v}$ が存在することが分かります。すると $\mathbb{w} = (M - 3E)\mathbb{v} \neq \mathbb{o}$ は $(M - 2E)\mathbb{w} = \mathbb{o}$ を満たしていますから、M の固有値 2 に関する固有ヴェクターであることが分かります。従って M は固有値 2 をもちます。

全く同様に、$(M - 3E)(M - 2E) = O$ として考えれば M が固有値 3 をもつことも分かります。

以上から M の固有値は 2 と 3 です。　□

空間の諸問題　解答例

基本演習 10　四面体 $OABC$ の辺 OA, AB, BC, OC, OB, AC の中点を K, L, M, N, P, Q とするとき、次のことを証明してください。

(1) 四角形 $KLMN$ は平行四辺形である。

(2) 直線 KM, LN, PQ は１点で交わる。

(1)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{KL} &= \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \\
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}
\end{aligned}$$

従って辺 KL と辺 MN は平行であり長さが等しいので、四角形 $KLMN$ は平行四辺形です。

(2) 平行四辺形 $KLMN$ の中心を G とすると、

$$\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OG}$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OM}\\&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}\\&= \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}\\&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\\&= 2\overrightarrow{PG}\end{aligned}$$

ですから、直線 PQ は点 G を通ることが分かります。従って問題の３直線は１点で交わります。 □

基本演習 11 四面体 $OABC$ において、$OA \perp BC, OB \perp AC$ であるとき、次のことを証明してください。

(1) $OC \perp AB$

(2) $OA^2 + BC^2 = OB^2 + AC^2 = OC^2 + AB^2$

---

(1) $OA \perp BC, OB \perp AC$ なので

$$0 = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} \cdot \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$
$$0 = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} \cdot \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

ですから、第２式から第１式を引けば

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \cdot \overrightarrow{OC} &= 0\\\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} &= 0\end{aligned}$$

となり、$OC \perp AB$ であることが分かります。

(2) $OA \perp BC, OB \perp AC, OC \perp AB$ に注意します。

$$-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC}$$
$$\left|-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2$$

$$-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB}$$
$$\left|-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2$$

から

$$OB^2 + AC^2 = OC^2 + AB^2$$

であり、また、

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$$
$$\left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$$

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA}$$
$$\left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BA}\right|^2$$

から

$$OA^2 + BC^2 = OC^2 + AB^2$$

ですので、

$$OA^2 + BC^2 = OB^2 + AC^2 = OC^2 + AB^2$$

が成り立ちます。 □

基本演習 12 正四面体 $OABC$ の相対する辺、たとえば OA と BC、は互いに垂直であることを証明してください。

４つの面がすべて正三角形のである場合、すべて合同な正三角形であることに注意します。

また、$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ のいずれか２つのベクトルの挟む角は $\frac{\pi}{3}$ です。すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OA} \cdot \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}\right)\\&= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

$$= OA\cdot OC\cos\frac{\pi}{3} - OA\cdot OB\cos\frac{\pi}{3}$$
$$= 0$$

となって、OA と BC は垂直であることが分かります。他の組み合わせも同様です。 □

発展演習 13 四面体 $TABC$ の内部に点 P があって、

$$\overrightarrow{TP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{TA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{TB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{TC}$$

が成り立っているとき、以下の問いに答えてください。

(1) 直線 TP と平面 ABC の交点を Q とするとき、$\overrightarrow{TQ}$ を $\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}$ を用いて表してください。

(2) 直線 AQ と辺 BC の交点 D に対して、$BD : DC$ を求めてください。

(3) $\triangle QCA$ の面積を S_2、$\triangle QAB$ の面積を S_3 とするとき、$S_2 : S_3$ を求めてください。

(4) 四面体 $PTAC$ の体積を V_2、四面体 $PTAB$ の体積を V_3 とするとき、$V_2 : V_3$ を求めてください。

(5) 四面体 $PABC, PTBC$ の体積をそれぞれ V_0, V_1 とするとき、$V_0 : V_1 : V_2 : V_3$ を求めてください。

(6)
$$V_0\overrightarrow{PT} + V_1\overrightarrow{PA} + V_2\overrightarrow{PB} + V_3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

が成り立つことを示してください。

(1)

$$\overrightarrow{TP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{TA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{TB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{TC} = \frac{2}{12}\overrightarrow{TA} + \frac{3}{12}\overrightarrow{TB} + \frac{4}{12}\overrightarrow{TC} = \frac{9}{12}\left(\frac{2}{9}\overrightarrow{TA} + \frac{3}{9}\overrightarrow{TB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{TC}\right)$$

ですから、$\overrightarrow{TR} = \frac{4}{3}\overrightarrow{TP}$ となる点を P とすると

$$\overrightarrow{TR} = \frac{2}{9}\overrightarrow{TA} + \frac{3}{9}\overrightarrow{TB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{TC}$$

であって

$$\frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = 1$$

により、点 R は平面 ABC 上にありますから、この点が問題の点 Q です。つまり、

$$\overrightarrow{TQ} = \frac{2}{9}\overrightarrow{TA} + \frac{3}{9}\overrightarrow{TB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{TC}$$

です。

(2)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{TQ} &= \frac{2}{9}\overrightarrow{TA} + \frac{3}{9}\overrightarrow{TB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{TC} \\
\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AQ} &= \frac{2}{9}\overrightarrow{TA} + \frac{3}{9}\left(\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AB}\right) + \frac{4}{9}\left(\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AC}\right) \\
\overrightarrow{AQ} &= \frac{3}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{7}{9}\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}\right)
\end{aligned}$$

ですから、$\overrightarrow{AS} = \frac{9}{7}\overrightarrow{AQ}$ となる点 S は

$$\overrightarrow{AS} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$$

を満たしており、$\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$ ですから、点 S は辺 BC 上にあって、辺 BC を $4 : 3$ に内分しています。これが問題の点 D です。

したがって、

$$BD : DC = 4 : 3$$

です。

(3) (2) の結果から、$S_2 : S_3 = 3 : 4$ です。

(4) 三角形 QAB, QCA をそれぞれの底面とし、高さが等しい四面体の体積比は定面積比に等しいので、

(四面体 $TQCA$ の体積) : (四面体 $TQAB$ の体積) $=$ ($\triangle QCA$ の面積) : ($\triangle QAB$ の面積)
(四面体 $PQCA$ の体積) : (四面体 $PQAB$ の体積) $=$ ($\triangle QCA$ の面積) : ($\triangle QAB$ の面積)

となっていますから、差をとれば

(四面体 $TPCA$ の体積) : (四面体 $TPAB$ の体積) $=$ ($\triangle QCA$ の面積) : ($\triangle QAB$ の面積)

$$V_2 : V_3 = S_2 : S_3 = 3 : 4$$

です。

(5) 全く同様な議論によれば、

$$V_1 : V_2 = \triangle QBC : \triangle QCA = 2 : 3$$

となりますから、

$$V_1 : V_2 : V_3 = 2 : 3 : 4$$

であり、また、$TP : PQ = 3 : 1$ でしたから、$V_1 + V_2 + V_3 : V_0 = 3 : 1$ であって、

$$V_0 : V_1 : V_2 : V_3 = 3 : 2 : 3 : 4$$

です。

(6)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{TP} &= \frac{1}{6}\overrightarrow{TA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{TB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{TC} \\
\overrightarrow{TP} &= \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{TP} + \overrightarrow{PA}\right) + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{TP} + \overrightarrow{PB}\right) + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{TP} + \overrightarrow{PC}\right) \\
\vec{0} &= \frac{3}{12}\overrightarrow{PT} + \frac{1}{6}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} \\
\overrightarrow{0} &= 3\overrightarrow{PT} + 2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC}
\end{aligned}$$

ですから

$$V_0\overrightarrow{PT} + V_1\overrightarrow{PA} + V_2\overrightarrow{PB} + V_3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

が成り立ちます。 □

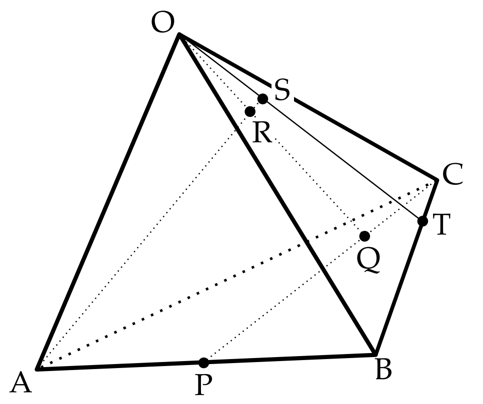
発展演習 14 四面体 $OABC$ において、線分 AB の中点を P、線分 CP を $1:2$ の比に内分する点を Q、線分 OQ を $1:2$ の比に内分する点を R とします。また３点 O, B, C を通る平面と直線 AR の交点を S、直線 OS と直線 BC の交点を T とします。

(1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、$\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表してください。

(2) 四面体 $OABC$ の体積 V_1 と、四面体 $PQST$ の体積 V_2 の比 $V_1 : V_2$ を求めてください。

(1)(2)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OR} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OQ} \\
&= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}\right) \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{PC} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{2}{9}\left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}\right) \\
&= \frac{1}{9}\overrightarrow{OP} + \frac{2}{9}\overrightarrow{OC} \\
&= \frac{1}{18}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{18}\overrightarrow{OB} + \frac{4}{18}\overrightarrow{OC}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OR} \\
&= \overrightarrow{AO} + \frac{1}{18}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{18}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) + \frac{4}{18}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \frac{12}{18}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{18}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{17}{18}\left(\frac{12}{17}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{17}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{17}\overrightarrow{AC}\right)
\end{aligned}$$

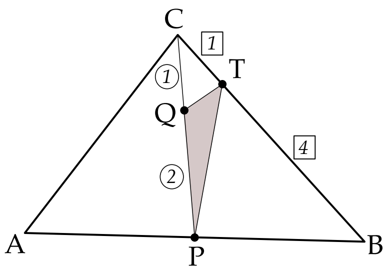
です。また直線 AR の延長線が平面 OBC と交わる点が S でしたから

$$\overrightarrow{AS} = \frac{12}{17}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{17}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{17}\overrightarrow{AC}$$

です。従って

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{12}{17}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{17}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) + \frac{4}{17}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}\right) \\
&= \frac{1}{17}\overrightarrow{OB} + \frac{4}{17}\overrightarrow{OC} \\
&= \frac{1}{17}\vec{b} + \frac{4}{17}\vec{c} \\
&= \frac{5}{17}\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{OC}\right) \\
\overrightarrow{OT} &= \frac{1}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{OC}
\end{aligned}$$

が分かります。



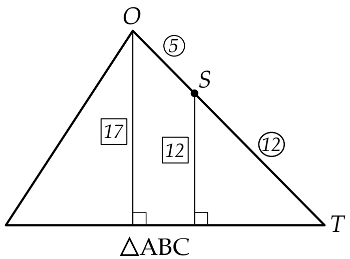
$\triangle ABC = S$ とすれば、

$$\triangle PBC = \frac{1}{2}S$$
$$\triangle PTC = \frac{1}{5}\triangle PBC = \frac{1}{10}S$$
$$\triangle PTQ = \frac{2}{3}\triangle PTC = \frac{1}{15}S$$

であって、高さの比が $17 : 12$ ですから、体積比は

$$V_1 : V_2 = 17S : 12 \cdot \frac{1}{15}S = 17 : \frac{4}{5} = 85 : 4$$

です。



□