

総復習

1 固有値・固有ベクトルの理解確認問題

基本演習 1 正方行列 M が正則でないことと、固有値 0 をもつことが同値であることを証明してください。

基本演習 2 $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ の固有方程式（2次方程式）の2つの解 λ_1, λ_2 に対して（重解すなわち $\lambda_1 = \lambda_2$ の場合も含めて）、

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = m_{11} + m_{22}$$

であることを示して下さい。

基本演習 3 2次正方行列 M の固有値は2のみであって、2つの平行でない固有ベクトル $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ が存在します。このとき M を求めてください。

基本演習 4 M^2 は固有値をもつが、 M は固有値をもたない2次正方行列 M の例を挙げてください。

基本演習 5 2次正方行列 M の固有値が2, 3であるとき、 M^2, M^{-1} の固有値をそれぞれ求めてください。

基本演習 6 $f(x)$ は多項式であるとし、2次正方行列 M の固有値が2, 3であるとき、 $f(x)$ の x のところに形式的に行列 M を代入して得られる行列 $f(M)$ の固有値を求めてください。

基本演習 7 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ は2次元の縦ベクトル、 A は2次正方行列であるとし、 $P = \begin{pmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix}$ として $P^{-1}AP$ が対角行列であるとき、 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ は A の固有ベクトルであることを証明してください。

基本演習 8 $M^2 = M$ を満たす2次対称行列 M が固有値0をもち、対応する固有ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ のみであるとき、 M を求めて下さい。

基本演習 9 2次正方行列 M は単位行列の定数倍ではなく、固有値1をもちません。また関係式：

$$M^3 - 6M^2 + 11M - 6E = O$$

が成り立っています。このとき M の固有値を求めて下さい。

2 空間の諸問題

基本演習 10 四面体 $OABC$ の辺 OA, AB, BC, OC, OB, AC の中点を K, L, M, N, P, Q とするとき、次のことを証明してください。

- (1) 四角形 $KLMN$ は平行四辺形である。
- (2) 直線 KM, LN, PQ は1点で交わる。

基本演習 11 四面体 $OABC$ において、 $OA \perp BC, OB \perp AC$ であるとき、次のことを証明してください。

- (1) $OC \perp AB$
- (2) $OA^2 + BC^2 = OB^2 + AC^2 = OC^2 + AB^2$

基本演習 12 正四面体 $OABC$ の相対する辺、たとえば OA と BC 、は互いに垂直であることを証明してください。

発展演習 13 四面体 $TABC$ の内部に点 P があって、

$$\overrightarrow{TP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{TA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{TB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{TC}$$

が成り立っているとき、以下の問いに答えてください。

- (1) 直線 TP と平面 ABC の交点を Q とするとき、 $\overrightarrow{TQ}$ を $\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}$ を用いて表してください。
- (2) 直線 AQ と辺 BC の交点 D に対して、 $BD : DC$ を求めてください。
- (3) $\triangle QCA$ の面積を S_2 、 $\triangle QAB$ の面積を S_3 とするとき、 $S_2 : S_3$ を求めてください。
- (4) 四面体 $PTAC$ の体積を V_2 、四面体 $PTAB$ の体積を V_3 とするとき、 $V_2 : V_3$ を求めてください。
- (5) 四面体 $PABC, PTBC$ の体積をそれぞれ V_0, V_1 とするとき、 $V_0 : V_1 : V_2 : V_3$ を求めてください。
- (6) $V_0\overrightarrow{PT} + V_1\overrightarrow{PA} + V_2\overrightarrow{PB} + V_3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ が成り立つことを示してください。

発展演習 14 四面体 $OABC$ において、線分 AB の中点を P 、線分 CP を1:2の比に内分する点を Q 、線分 OQ を1:2の比に内分する点を R とします。また3点 O, B, C を通る平面と直線 AR の交点を S 、直線 OS と直線 BC の交点を T とします。

- (1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、 $\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表してください。
- (2) 四面体 $OABC$ の体積 V_1 と、四面体 $PQST$ の体積 V_2 の比 $V_1 : V_2$ を求めてください。

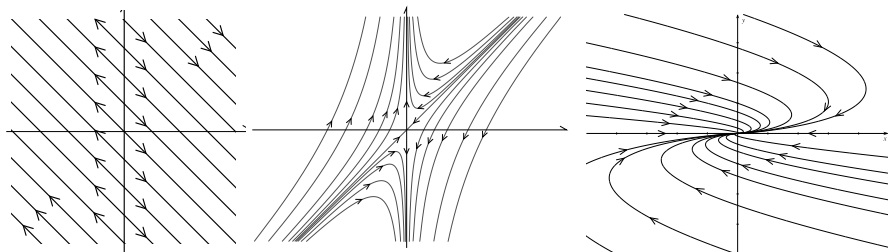
3 令和5年度後学期定期試験

1

$$M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

として以下の問いに答えてください ($M^0 = E$ とします)。

- (1) 行列 M の固有値・固有ベクトルを求めて下さい。
- (2) 行列 M を対角化し、 M^n を求めて下さい。
- (3) 点 (x_n, y_n) を P_n とするとき点列 $\{P_n\}$ は収束するでしょうか？ するかしませんか答え、更に収束する場合には極限点も求めて下さい。収束しない場合にはしない理由も述べて下さい。
- (4) M の表す1次変換によって平面内の点がどのように動くか、上の結果と講義で学んだ知識から予想されることを、他の行列の場合の例(下図)を参考にして図示して下さい。



2 Pell's 方程式 $x^2 - 3y^2 = 1$ の正の整数解を3組求めて下さい。

3 次の行列の逆行列をはき出し法で求めてください。

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4 漸化式：

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - b_n \\ b_{n+1} = 6a_n - 2b_n \end{cases}, \quad a_0 = 1, b_0 = 1$$

を満たす数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を求めて下さい。

5 次の行列式を計算して下さい。(2) は因数分解して下さい。

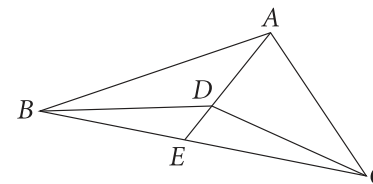
$$(1) \begin{vmatrix} 12 & 11 & 5 \\ 6 & 10 & 8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

6 $\triangle ABC$ の内部に点 D があって、

$$3\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

が成り立っているとします。

このとき直線 AD と辺 BC の交点 E は辺 BC をどんな比で内分するのでしょうか。
 $BE : EC$ を答えて下さい。



7 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えてください。

- (1) A の固有値を全て求めてください。
- (2) A の最大の固有値について固有ベクトルを求めて下さい。