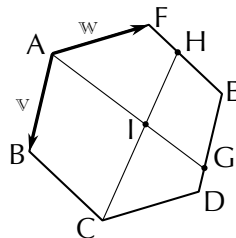


1 図の正六角形 ABCDEF において、 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$ ,  $\overrightarrow{AF} = \mathbf{w}$  とします。

また、線分 DE を 1 : 3 に内分する点を G、線分 EF を 3 : 2 に内分する点を H とし、2 直線 AG と CH の交点を I とします。



- (1)  $\overrightarrow{BC}$  を  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  を使って表してください。
- (2)  $\overrightarrow{AG}$  を  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  を使って表してください。
- (3)  $\overrightarrow{CH}$  を  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  を使って表してください。
- (4)  $\overrightarrow{AI}$  を  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  を使って表してください。

配点：(1)10 点、(2)5 点、(3)5 点、(4)5 点 シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】 (1) 正六角形の性質から線分 AD は外接円の直径であり、線分 BC と平行で長さが 2 倍ですから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ 2\overrightarrow{BC} &= \mathbf{v} + \overrightarrow{BC} + \mathbf{w} \\ \overrightarrow{BC} &= \mathbf{v} + \mathbf{w}\end{aligned}$$

です。

(2)

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DE} = 2(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - \frac{1}{4}\mathbf{v} = \frac{7}{4}\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$$

(3)

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \frac{3}{5}\overrightarrow{EF} = \mathbf{w} - \mathbf{v} - \frac{3}{5}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = -\frac{8}{5}\mathbf{v} + \frac{2}{5}\mathbf{w}$$

(4)  $\overrightarrow{AI} = m\overrightarrow{AG}$  と置けば、

$$\overrightarrow{AI} = \frac{7m}{4}\mathbf{v} + 2m\mathbf{w} \cdots (*)$$

であり、一方  $\overrightarrow{CI} = n\overrightarrow{CH}$  と置けば

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CI} &= -\frac{8n}{5}\mathbf{v} + \frac{2n}{5}\mathbf{w} \\ \overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \frac{8n}{5}\mathbf{v} + \frac{2n}{5}\mathbf{w} \\ &= 2(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - \mathbf{w} - \frac{8n}{5}\mathbf{v} + \frac{2n}{5}\mathbf{w} \\ &= \left(2 - \frac{8n}{5}\right)\mathbf{v} + \left(1 + \frac{2n}{5}\right)\mathbf{w}\end{aligned}$$

ですから

$$\begin{aligned}\frac{7m}{4}\mathbf{v} + 2m\mathbf{w} &= \left(2 - \frac{8n}{5}\right)\mathbf{v} + \left(1 + \frac{2n}{5}\right)\mathbf{w} \\ \left(\frac{7m}{4} + \frac{8n}{5} - 2\right)\mathbf{v} &= \left(-2m + \frac{2n}{5} + 1\right)\mathbf{w} \cdots (**)\end{aligned}$$

であり、 $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  は平行ではないので

$$\begin{cases} \frac{7}{4}m + \frac{8}{5}n = 2 \\ 2m - \frac{2}{5}n = 1 \end{cases}$$

が成り立っていることが分かり、これを解けば

$$\left(\frac{7}{4} + 8\right)m = 6 \quad \text{すなわち} \quad m = \frac{8}{13}$$

が得られます。これを戻せば

$$\overrightarrow{AI} = \frac{7m}{4}\mathbf{v} + 2m\mathbf{w} = \frac{14}{13}\mathbf{v} + \frac{16}{13}\mathbf{w}$$

です。

2  $xyz$  座標空間に 3 点  $A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3)$  があります。このとき以下の問いに答えて下さい。

(1) 2つのベクトル  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$  と直交するベクトルを求めて下さい。

(2) 3 点  $A, B, C$  を通る平面の方程式を求めて下さい。

(3) (2) の平面に関して点  $D(0, 1, 0)$  と対称な点を  $E$  とするとき、点  $E$  の座標を求めて下さい。

配点：(1)10 点、(2)5 点、(3)5 点

シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】 (1)

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$6(x - 1) + 3y + 2z = 0$$

(3) 直線  $DE$  は

$$\text{直線 } DE: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とパラメータ表示されます ( $t$  はパラメータ)。

従ってこの直線と  $A, B, C$  を通る平面の交点は

$$6 \cdot 6t + 3(1 + 3t) + 2 \cdot 2t = 6$$

$$49t = 3$$

$$t = \frac{3}{49}$$

により、パラメータ  $\frac{3}{49}$  に対応します。点  $D$  がパラメータ 0 に対応していたことから、対称点  $E$  は  $t = \frac{6}{49}$  に対応します。従って点  $E$  の座標は

$$E \left( \frac{36}{49}, \frac{67}{49}, \frac{12}{49} \right)$$

です。

□

3  $O(0, 0, 0), A(1, -2, -1), B(-2, -5, 0), C(2, 1, 0)$  とします。

(1) 三角形  $OBC$  の面積を求めて下さい。

(2) 4 点  $O, A, B, C$  を頂点とした三角錐  $OABC$  の体積を求めて下さい。ただし、一般に円錐・三角錐・四角錐などの錐体の体積が

$$(\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{3}$$

で求められることは既知として良いものとします。

配点：(1)6 点、(2)4 点

シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】 (1)

$$\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ですから、

$$(\text{三角形 } OBC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$

です。

(2) 点  $O, B, C$  が  $xy$ -平面上にあることから、三角形  $OBC$  を底面と考えた場合の三角錐の高さは、点  $A$  の  $z$  座標の絶対値であり、1 です。従って体積は

$$\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 1 = \frac{4}{3}$$

です。

□

4 次の行列の逆行列を求めてください。ただし、少なくともどちらか一方は『掃き出し法』で計算して下さい。

(1) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

(2) 
$$\begin{pmatrix} -11 & -16 & -1 \\ 16 & 20 & 2 \\ 10 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

配点：(1)10 点、(2)10 点

シラバス到達目標：ウ

【解答例】 (1)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = -3 + 15 - 10 = 2$$

従って

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} {}^t \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 1 & -7 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

です。

|         |         |                   |
|---------|---------|-------------------|
| 1 2 3   | 1 0 0   | (1)               |
| 3 4 5   | 0 1 0   | (2)               |
| 5 7 8   | 0 0 1   | (3)               |
| 1 2 3   | 1 0 0   | (1)               |
| 0 -2 -4 | -3 1 0  | (2) - 3(1) = (4)  |
| 0 -3 -7 | -5 0 1  | (3) - 5(1) = (5)  |
| 1 2 3   | 1 0 0   | (1)               |
| 0 -2 -4 | -3 1 0  | (4)               |
| 0 6 14  | 10 0 -2 | -2(5) = (6)       |
| 1 0 -1  | -2 1 0  | (1) + (4) = (7)   |
| 0 -2 -4 | -3 1 0  | (4)               |
| 0 0 2   | 1 3 -2  | (6) + 3(4) = (8)  |
| 2 0 -2  | -4 2 0  | 2(7) = (9)        |
| 0 -2 -4 | -3 1 0  | (4)               |
| 0 0 2   | 1 3 -2  | (8)               |
| 2 0 0   | -3 5 -2 | (9) + (8) = (10)  |
| 0 -2 0  | -1 7 -4 | (4) + 2(8) = (11) |
| 0 0 2   | 1 3 -2  | (8)               |
| 2 0 0   | -3 5 -2 | (10)              |
| 0 2 0   | 1 -7 4  | -(11)             |
| 0 0 2   | 1 3 -2  | (8)               |

従って求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 1 & -7 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

です。

(2)

$$\begin{pmatrix} -16 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -11 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -16 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -6 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -11 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} -16 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -11 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ -12 \end{pmatrix} = 36$$

ですから、逆行列は

$$\frac{1}{36} \begin{pmatrix} 12 & -12 & 24 \\ 18 & -12 & -6 \\ -12 & 6 & 36 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

です。

|     |     |    |    |    |    |                    |
|-----|-----|----|----|----|----|--------------------|
| −11 | −16 | −1 | 1  | 0  | 0  | (1)                |
| 16  | 20  | 2  | 0  | 1  | 0  | (2)                |
| 10  | 14  | 2  | 0  | 0  | 1  | (3)                |
| −1  | −2  | 1  | 1  | 0  | 1  | (1) + (3) = (4)    |
| 6   | 6   | 0  | 0  | 1  | −1 | (2) − (3) = (5)    |
| 10  | 14  | 2  | 0  | 0  | 1  | (3)                |
| −1  | −2  | 1  | 1  | 0  | 1  | (4)                |
| 0   | −6  | 6  | 6  | 1  | 5  | (5) + 6(4) = (6)   |
| 0   | −6  | 12 | 10 | 0  | 11 | (3) + 10(4) = (7)  |
| −3  | −6  | 3  | 3  | 0  | 3  | 3(4) = (8)         |
| 0   | −6  | 6  | 6  | 1  | 5  | (6)                |
| 0   | −6  | 12 | 10 | 0  | 11 | (7)                |
| −3  | 0   | −3 | −3 | −1 | −2 | (8) − (6) = (9)    |
| 0   | −6  | 6  | 6  | 1  | 5  | (6)                |
| 0   | 0   | 6  | 4  | −1 | 6  | (7) − (6) = (10)   |
| −6  | 0   | −6 | −6 | −2 | −4 | 2(9) = (11)        |
| 0   | −6  | 6  | 6  | 1  | 5  | (6)                |
| 0   | 0   | 6  | 4  | −1 | 6  | (10)               |
| −6  | 0   | 0  | −2 | −3 | 2  | (11) + (10) = (12) |
| 0   | −6  | 0  | 2  | 2  | −1 | (6) − (10) = (13)  |
| 0   | 0   | 6  | 4  | −1 | 6  | (10)               |
| 6   | 0   | 0  | 2  | 3  | −2 | −(12)              |
| 0   | 6   | 0  | −2 | −2 | 1  | −(13)              |
| 0   | 0   | 6  | 4  | −1 | 6  | (10)               |

従って求める逆行列は

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

です。

□

5  $A, B$  を 2 次正方行列とします。 $A^2 = A, B^2 = B, (A + B)^2 = A + B$  のとき、以下の問いに答えて下さい。

(1)  $AB + BA = O$ であることを証明して下さい。

(2)  $AB = BA = O$ であることを証明して下さい。

配点：(1)4 点、(2)1 点

シラバス到達目標：ウ

【解答例】 (1)

$$(A + B)^2 = A + B$$

$$A^2 + AB + BA + B^2 = A + B$$

$$AB + BA = O$$

(2)

$$AB = A^2B = A(AB) = A(-BA) = -(AB)A = -(-BA)A = BA^2 = BA$$

ですから、(1) の結果と合わせて  $AB = BA = O$  です。□

6 次の行列式を計算して下さい。文字の入ったものは出来るだけ因数分解した形で答えてください。

(1)  $\begin{vmatrix} u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(2)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

(3)  $\begin{vmatrix} ca & bc & c^2 \\ bc & c^2 & ca \\ bc & ab & b^2 \end{vmatrix}$

配点：(1)10 点、(2)5 点、(3)5 点

シラバス到達目標：エ

【解答例】 (1)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} u & v-u & w-u \\ u^2 & v^2-u^2 & w^2-u^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} v-u & w-u \\ v^2-u^2 & w^2-u^2 \end{vmatrix} \\ &= (v-u)(w-u) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ v+u & w+u \end{vmatrix} \\ &= (v-u)(w-u)(w-v) \\ &= (u-v)(v-w)(w-u) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

(3)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ca & bc & c^2 \\ bc & c^2 & ca \\ bc & ab & b^2 \end{vmatrix} &= bc^2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \\ &= bc^2 \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} \\ &= bc^2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} \\ &= bc^2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} \\ &= bc^2(a+b+c) \{-(b-c)^2 - (a-b)(a-c)\} \\ &= bc^2(a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2) \end{aligned}$$

□