1 **四面体 $OABC$ において、線分 AB の中点を P、線分 CP を $1:2$ の比に内分する点を Q、線分 OQ を $1:2$ の比に内分する点を R とします。また３点 O, B, C を通る平面と直線 AR の交点を S とし、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき、以下の問いに答えてください。**

(1) $\overrightarrow{OR}$ **を** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **を用いて表してください。**

(2) **次の事実に注意して、**$\overrightarrow{OS}$ **を** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **を用いて表してください。**

事実　**同一平面上にない４点 Q, A, B, C によって点 X が**

$$\overrightarrow{QX}=s\overrightarrow{QA}+t\overrightarrow{QB}+u\overrightarrow{QC}$$

と表されるとき、点 X が平面 ABC 上にあるための必要十分条件は

$$s+t+u=1$$

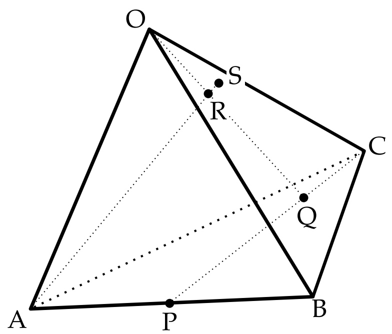
となることです。

配点：(1)10 点、(2)5 点	シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR}&=\frac{1}{3}\overrightarrow{OQ}\\&=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}\right)\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}+\frac{2}{9}\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC}\right)\\&=\frac{1}{9}\overrightarrow{OP}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OC}\\&=\frac{1}{18}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{18}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{18}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$



(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR}&=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OR}\\&=\overrightarrow{AO}+\frac{1}{18}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{18}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right)+\frac{4}{18}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\right)\\&=\frac{12}{18}\overrightarrow{AO}+\frac{1}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{18}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{17}{18}\left(\frac{12}{17}\overrightarrow{AO}+\frac{1}{17}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{17}\overrightarrow{AC}\right)\end{aligned}$$

です。

また直線 AR の延長線が平面 OBC と交わる点が S でしたから

$$\overrightarrow{AS}=\frac{12}{17}\overrightarrow{AO}+\frac{1}{17}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{17}\overrightarrow{AC}$$

です。

従って

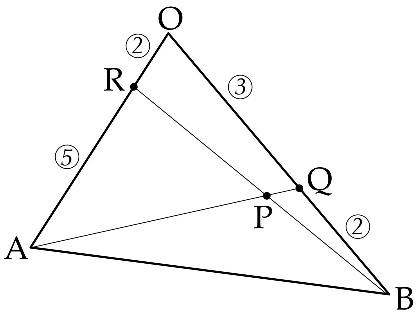
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AS}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{12}{17}\overrightarrow{AO}+\frac{1}{17}\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)+\frac{4}{17}\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)\\&=\frac{1}{17}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{17}\overrightarrow{OC}\\&=\frac{1}{17}\vec{b}+\frac{4}{17}\vec{c}\end{aligned}$$

が分かります。　□

2 $\triangle OAB$ の辺 OB を $3:2$ に内分する点を Q、辺 OA を $2:5$ に内分する点を R とし、線分 AQ と線分 BR の交点を P とします。
$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ となる m,n の値を求めてください。

配点：10 点	シラバス到達目標：ア、イ

【解答例その１】



$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ とします。

$$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+\frac{5}{3}n\overrightarrow{OQ}$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{7}{2}m\overrightarrow{OR}+n\overrightarrow{OB}$$

が成り立っていて、点 P は直線 AQ,BR 上にありますから

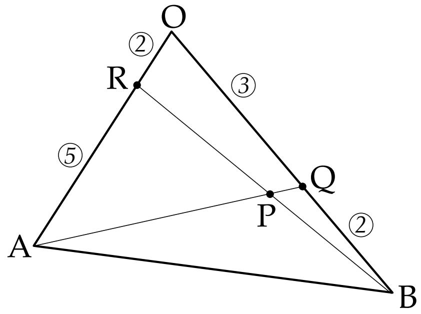
$$m+\frac{5}{3}n=1,\qquad \frac{7}{2}m+n=1$$

です。これを解けば

$$m=\frac{4}{29},\qquad n=\frac{15}{29}$$

です。

【解答例その２】



$$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$$

ですから、$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AQ}$ と置けば、

$$\overrightarrow{AP}=s\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ}\right)=-s\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}s\overrightarrow{OB}\quad\cdots(*)$$

です。

一方

$$\overrightarrow{OR}=\frac{2}{7}\overrightarrow{OA}$$

ですから、$\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BR}$ と置けば、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}\\&=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BR}\\&=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+t\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OR}\right)\\&=-\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}+\frac{2}{7}t\overrightarrow{OA}\\&=\left(\frac{2}{7}t-1\right)\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}\quad\cdots(**)\end{aligned}$$

です。

ここで $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は平行ではないので、$(*), (**)$ から

$$s = 1 - \frac{2}{7}t, \quad \frac{3}{5}s = 1 - t$$

が得られ、これを解けば $t = \frac{14}{29}$ ですから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \left(\frac{2}{7}t - 1\right)\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} &= -\frac{25}{29}\overrightarrow{OA} + \frac{15}{29}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OP} &= \frac{4}{29}\overrightarrow{OA} + \frac{15}{29}\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

と表せることが分かります。従って

$$m = \frac{4}{29}, \quad n = \frac{15}{29}$$

です。 □

3 次の行列の逆行列を求めてください。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

配点：10 点	シラバス到達目標：ウ、エ、オ

【解答例その１】

1	3	4	1	0	0	(1)
2	4	2	0	1	0	(2)
3	2	4	0	0	1	(3)
1	3	4	1	0	0	(1)
0	-2	-6	-2	1	0	$(2)-2(1)=(4)$
0	-7	-8	-3	0	1	$(3)-3(1)=(5)$
2	6	8	2	0	0	$2(1)=(6)$
0	-2	-6	-2	1	0	(4)
0	-14	-16	-6	0	2	$2(5)=(7)$
2	0	-10	-4	3	0	$(6)+3(4)=(8)$
0	-2	-6	-2	1	0	(4)
0	0	26	8	-7	2	$(7)-7(4)=(9)$
26	0	-130	-52	39	0	$13(8)=(10)$
0	26	78	26	-13	0	$-13(4)=(11)$
0	0	26	8	-7	2	(9)
26	0	-130	-12	4	10	$(10)+5(9)$
0	26	0	2	8	-6	$(11)-3(9)$
0	0	26	8	-7	2	(9)

従って求める逆行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} -12 & 4 & 10 \\ 2 & 8 & -6 \\ 8 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

です。

【解答例その２】

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} = -26$$

ですから、

$$M^{-1} = -\frac{1}{26}\,{}^{t}\!\begin{pmatrix} 12 & -2 & -8 \\ -4 & -8 & 7 \\ -10 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} -12 & 4 & 10 \\ 2 & 8 & -6 \\ 8 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

です。

□

4 M が 3 次直交行列のとき、任意の 3 次元ヴェクター $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ に対して

$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = (M\mathbb{a}) \cdot (M\mathbb{b})$$

となることを証明してください。

配点：5 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例】

$$M\mathbb{a} \cdot M\mathbb{b} = {}^{t}(M\mathbb{a})M\mathbb{b} = {}^{t}\mathbb{a}{}^{t}MM\mathbb{b} = {}^{t}\mathbb{a}\,\mathbb{b} = \mathbb{a} \cdot \mathbb{b}.$$

□

5 次の３本の４次元ヴェクターについて以下の問いに答えて下さい：

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbb{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbb{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(1) $\mathbb{b} + k\mathbb{a}$ が $\mathbb{a}$ と垂直になる様な定数 k を求めて下さい。

(2) 上で求めた k を使って $\mathbb{d} = \mathbb{b} + k\mathbb{a}$ とします。このとき、$\mathbb{c} + p\mathbb{a} + r\mathbb{d}$ が $\mathbb{a}, \mathbb{d}$ の両方と垂直である様に定数 p, r を求めて下さい。

配点：(1)5 点、(2)5 点	シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】

(1) まず内積を計算しておくと、

$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = 36, \quad \mathbb{b} \cdot \mathbb{c} = 17, \quad \mathbb{c} \cdot \mathbb{a} = 19,$$
$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{a} = 31, \quad \mathbb{b} \cdot \mathbb{b} = 47, \quad \mathbb{c} \cdot \mathbb{c} = 30$$

ですから、

$$\mathbb{a} \cdot (\mathbb{b} + k\mathbb{a}) = 36 + 31k = 0$$

従って $k = -\frac{36}{31}$ が分かります。

(2) $\mathbb{d} = \mathbb{b} + k\mathbb{a}$ とすると、

$$\mathbb{c} + p\mathbb{a} + r\mathbb{d} = \mathbb{c} + p\mathbb{a} + r(\mathbb{b} + k\mathbb{a}) = (p + rk)\mathbb{a} + r\mathbb{b} + \mathbb{c}$$

なので、

$$0 = \mathbb{a} \cdot \{(p + rk)\mathbb{a} + r\mathbb{b} + \mathbb{c}\} = 31(p + rk) + 36r + 19 = 31p + 19$$

から $p = -\frac{19}{31}$ です。また、

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{d} \cdot \{(p + rk)\mathbb{a} + r\mathbb{b} + \mathbb{c}\} \\ &= r\mathbb{d} \cdot \mathbb{b} + \mathbb{d} \cdot \mathbb{c} \\ &= r(\mathbb{b} + k\mathbb{a}) \cdot \mathbb{b} + (\mathbb{b} + k\mathbb{a}) \cdot \mathbb{c} \\ &= 47r + 36kr + 17 + 19k \\ &= 31 \cdot 47r - 36^2 r + 31 \cdot 17 - 19 \cdot 36 \\ &= 161r - 157 \end{aligned}$$

から、$r = \frac{157}{161}$ である事も分かります。 □

6 $M = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ とするとき、非負整数 n に対して M^n を求めてください。

配点：15 点	シラバス到達目標：ク、キ

【解答例その１】　固有方程式は

$$0 = |M - tE| = \begin{vmatrix} 5-t & -1 \\ 6 & -2-t \end{vmatrix} = (t-5)(t+2)+6 = t^2-3t-4 = (t-4)(t+1)$$

であり、固有値は $4, -1$ です。

固有値 4 に対した固有ヴェクターは、

$$(M-4E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解であり、$x = y$ ですから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり、固有値 4 に対応した固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ です。

固有値 -1 に対応した固有ヴェクターは、

$$(M+E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解であり、$6x = y$ ですから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 6x \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

となり、固有値 -1 に対応した固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ です。

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ と置けば、これは正則であって、

$$\begin{aligned}
MP &= \left(M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad M\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad -\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(4P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(P\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\
&= P\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
M &= P\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} \\
M^n &= \left\{P\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}\right\}^n \\
&= P\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6\cdot 4^n & -4^n \\ -(-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6\cdot 4^n-(-1)^n & -4^n+(-1)^n \\ 6\cdot 4^n-6(-1)^n & -4^n+6(-1)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

です。

【解答例その２】

　ケーリーハミルトンの定理により

$$O = M^2 - 3M - 4E = (M-4E)(M+E)$$

ですから、

$$
\begin{cases} M(M+E) = 4(M+E) \\ M(M-4E) = -(M-4E) \end{cases}
$$

が成り立っています。従って任意の正の整数 n に対して

$$
\begin{cases} M^n(M+E) = 4^n(M+E) \\ M^n(M-4E) = (-1)^n(M-4E) \end{cases}
$$

となり、第１式から第２式を辺々引けば

$$
\begin{aligned}
5M^n &= 4^n(M+E) - (-1)^n(M-4E) \\
M^n &= \frac{4^n}{5}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} - \frac{(-1)^n}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6\cdot 4^n-(-1)^n & -4^n+(-1)^n \\ 6\cdot 4^n-6(-1)^n & -4^n+6(-1)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が分かります。　□

7 $x^2 - 6y^2 = 1$ の正の整数解を２組求めてください。

配点：15 点	シラバス到達目標：カ

【解答例】

まず $(x, y) = (5, 2)$ は明らかに正の整数解です。そこで自明な整数解 $(1, 0)$ と、非正整数解 $(5, -2)$ を利用して

$$M\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

を満たす 2 次正方行列 M を求めると

$$\begin{aligned}M\begin{pmatrix}1 & 5\\0 & -2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}5 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}\\ M &= \begin{pmatrix}5 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5\\0 & -2\end{pmatrix}^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -5\\0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}5 & 12\\2 & 5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

が得られます。このとき

$$M\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}49\\20\end{pmatrix}$$

であり、

$$49^2 - 6\cdot 20^2 = 2401 - 2400 = 1$$

となって、$(x, y) = (49, 20)$ も１つの正の整数解であることが分かります。

以上により、見つかった正の整数解は

$$(x, y) = (5, 2), (49, 20)$$

です。

その他は例えば $(485, 198)$ でも良い。

□

8 行列 $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-4 & 4 & 1\end{pmatrix}$ について以下の問いに答えてください。

(1) A の固有値を全て求めてください。

(2) A の<u>負の固有値</u>について固有ヴェクターを求めて下さい。

配点：(1)10 点、(2)10 点	シラバス到達目標：キ

【解答例】

(1) A の固有方程式は

$$\begin{aligned}0 =&|A - lE|\\ =&\begin{vmatrix}-l & 1 & 0\\0 & -l & 1\\-4 & 4 & 1-l\end{vmatrix}\\ =&(l-1)(4-l^2)\\ =&(l-1)(2-l)(2+l)\end{aligned}$$

ですから、A の固有値は $1,\ 2,\ -2$ です。

(2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となる様なヴェクター $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求めれば良いわけですが、これは連立方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めることです。

　第１、２式から

$$y = -2x, \quad z = -2y$$

が分かり，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

が分かるので，求める固有ヴェクターは $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ です。　□