

2次曲線と直線の幾何学

1 円の接線

1.1 円と直線の接する条件

問題 1.1 円 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ と直線 $ax + by + c = 0$ が接するための条件を求めて下さい。

直線の方程式をちょっとだけ変形して

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + ax_0 + by_0 + c = 0$$

ここから $-a(x - x_0) = b(y - y_0) + ax_0 + by_0 + c$ を円の方程式を変形して得られる $a^2(x - x_0)^2 + a^2(y - y_0)^2 = a^2r^2$ に代入すると ($a \neq 0$ とします。 $a = 0$ の場合は $b \neq 0$ なのでそっちでやれば同様です)、

$$\begin{aligned} & \{b(y - y_0) + ax_0 + by_0 + c\}^2 + a^2(y - y_0)^2 = a^2r^2 \\ & (a^2 + b^2)(y - y_0)^2 + 2b(ax_0 + by_0 + c)(y - y_0) + (ax_0 + by_0 + c)^2 - a^2r^2 = 0 \end{aligned}$$

となりますが、この2次方程式が重解であるための条件は判別式が0である事ですから

$$\begin{aligned} & b^2(ax_0 + by_0 + c)^2 - (a^2 + b^2)\{(ax_0 + by_0 + c)^2 - a^2r^2\} = 0 \\ & (a^2 + b^2)r^2 = (ax_0 + by_0 + c)^2 \end{aligned}$$

が得られます。 □

事実 1.2 円 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ と直線 $ax + by + c = 0$ が接するための条件：

$$(a^2 + b^2)r^2 = (ax_0 + by_0 + c)^2.$$

1.2 円の接線

円周 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ 上の2点 $(x_0 \pm r, y_0)$ 以外の付近では、ローカルに y は x の(微分可能な)関数になっていますから、微分すれば

$$2(x - x_0) + 2(y - y_0)y' = 0 \quad \text{従って} \quad y' = -\frac{x - x_0}{y - y_0}$$

が成り立っています。従って円周上の点 (α, β) における円の接線は、

$$y - \beta = -\frac{\alpha - x_0}{\beta - y_0}(x - \alpha) \quad \text{すなわち} \quad (\alpha - x_0)(x - \alpha) + (\beta - y_0)(y - \beta) = 0$$

ですが、点 (α, β) が円周上にある条件：

$$(\alpha - x_0)^2 + (\beta - y_0)^2 = r^2$$

と辺々加えれば

$$(\alpha - x_0)(x - x_0) + (\beta - y_0)(y - y_0) = r^2$$

とも書けることが分かります。そしてこの形であれば、先に除外した特別な2点における自明な接線も表現できており、任意の点における接線の表現が得られました。他の2次曲線も同様です。

事実 1.3 [2次曲線の接線]

(o) 円 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ 上の点 (α, β) における接線：

$$(\alpha - x_0)(x - x_0) + (\beta - y_0)(y - y_0) = r^2.$$

(i) 楕円 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ 上の点 (α, β) における接線：

$$\frac{(\alpha - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(\beta - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1.$$

(ii) 放物線 $y - y_0 = p(x - x_0)^2$ 上の点 (α, β) における接線：

$$\frac{(y - y_0) + (\beta - y_0)}{2} = p(\alpha - x_0)(x - x_0).$$

(iii) 双曲線 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ 上の点 (α, β) における接線：

$$\frac{(\alpha - x_0)(x - x_0)}{a^2} - \frac{(\beta - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1.$$

1.3 有理形パラメータ

点 $(-1, 0)$ を通り傾きが t の直線 $y = t(x + 1)$ と単位円周との交点を求めると、

$$\begin{aligned}x^2 + t^2(x + 1)^2 &= 1 \\(1 + t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 &= 0 \\x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, -1\end{aligned}$$

により、交点は $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ です。従って、単位円周から1点 $(-1, 0)$ を除いた部分は次のパラメータ表示をもちます：

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2} \quad -\infty < t < \infty$$

今回は $(-1, 0)$ を除きましたが、任意の点で可能であることは言うまでもありません。

事実 1.4 [2 次曲線の有理型パラメータ]

(o) 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ から1点 $(-1, 0)$ を除いたもの：

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2} \quad -\infty < t < \infty$$

(i) 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ から1点 $(-a, 0)$ を除いたもの：

$$x = \frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2bt}{1 + t^2} \quad -\infty < t < \infty$$

(ii) 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ から1点 $(-a, 0)$ を除いたもの：

$$x = \frac{a(1 + t^2)}{1 - t^2}, \quad y = \frac{2bt}{1 - t^2} \quad t \neq \pm 1$$

2 J.-V. Poncelet の閉形定理

2.1 やってみよう

まずは別紙 (i ページ) を見て下さい。右に放物線と円が描いてありますが、放物線上の勝手な点から円に向かって接線を引きます。接点を通り過ぎてそのまま接線を延ば

して行くと再び放物線と交わりますね (接線がある程度寝ていないと紙から出てしまいますので最初の点の取り方を工夫して下さい)。

次にその再び交わった点からもう一度、別の接線を内部の円に向かって引いて下さい。さっきと同じ様に接点を通り過ぎてまたしても再び放物線と交わる点に到着します。

次に、これが最後のステップですが、またしてもそこから内部の円に向かってもう1つの接線を引いてみて下さい。どうですか、元の点に戻って来ませんか？

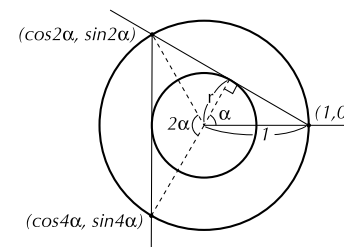
きちんと描けば『どの点からスタートしても』3回で元の点に戻って来ます。本来出発点によって状況は違って然るべきなのに、何故かどこから出発しても同じなんです。

他にも楕円の中に円の入ったものなどがありますので同じ事を試してみてください。外側の図形から出発して、内側の図形に接線を引いて... です。

2.2 どこから出発しても明らかに同じ場合 ～同心円～

一番単純なのがこの同心円の場合です。回転対称ですからどこからスタートしても同じですね。更に簡単のために、外側の円は半径1とし、内部の円の半径を r 、スタートポイントを点 $(1, 0)$ とします。

右の図を見れば分かる通り、一本目の接線を引いて再び外側の円と交わる点の座標は $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$ ですが、この α と云う角は、やはり図を見れば分かる通り $\alpha = \cos^{-1}r$ です。



次の二本目の接線を引くと、再び外側の円と交わる点は $(\cos 4\alpha, \sin 4\alpha)$ であり、この手順を繰り返して行けば、外の円周上に点がプロットされて行きます：

$$(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha), \quad (\cos 4\alpha, \sin 4\alpha), \quad (\cos 6\alpha, \sin 6\alpha), \dots$$

で、いつかスタート地点に帰って来るとするならば、ある自然数 n があって、 $(1, 0) = (\cos 2n\alpha, \sin 2n\alpha)$ となっているはずですね。これはすなわち、ある自然数 m があって $2n\alpha = 2m\pi$ となっている事を意味しますから、結局、 $\alpha = \frac{m}{n}\pi$ でなければなりません。

以上から、小さい方の円の半径が

$$\cos^{-1}r = (\text{有理数}) \times \pi$$

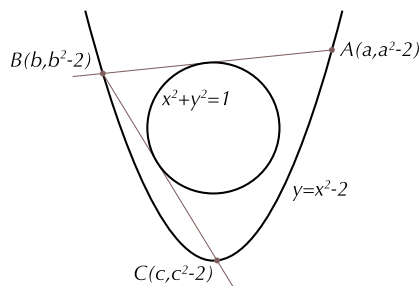
を満たしていなければ何度接線を引いても戻って来ないと云う事が分かります。

2.3 出発点によらない事が自明でない場合 ～放物線と円～

一番最初に皆さんに接線を引いてもらった放物線と円の場合を証明してみます。

別紙にある通り、放物線は $y = x^2 - 2$ であり、円は $x^2 + y^2 = 1$ です。

出発点を $A(a, a^2 - 2)$ 、一本目の接線を引いて再び放物線と交わった点を $B(b, b^2 - 2)$ 、二本目の接線を引いて得られた点を $C(c, c^2 - 2)$ としましょう。あとは直線 CA が円に接する事を示してやれば良いわけです。



2.3.1 直線 AB, BC が円に接すること

直線 AB の方程式は、 $y - (a^2 - 2) = \frac{b^2 - 2 - (a^2 - 2)}{b - a}(x - a)$ ですが、これを整理すると、

$$(b + a)x - y - ab - 2 = 0$$

となります。これが円 $x^2 + y^2 = 1$ と接するわけですから、今日計算した結果を使えば

$$(ab + 2)^2 = (a + b)^2 + 1$$

が直線 AB が円と接する条件です。

直線 BC の方も全く同様にして、と云うか、単に $a \rightarrow b, b \rightarrow c$ と記号を書き換えるだけです。接するための条件は $(bc + 2)^2 = (b + c)^2 + 1$ となります。

2.3.2 直線 CA が円に接すること

全く同様に考えれば、直線 CA が円に接するための条件は $(ca + 2)^2 = (c + a)^2 + 1$ となるはずですから、最終的にはこの式が成り立つ事を示してやれば良いわけです。

さっき考えた直線 AB, BC が円に接すると云う2つの条件式を良く見て下さい(ちょっとだけいじってあります)：

$$\begin{cases} (ab + 2)^2 = (a + b)^2 + 1 \\ (cb + 2)^2 = (c + b)^2 + 1 \end{cases}$$

どうですか？

$$(Xb + 2)^2 = (X + b)^2 + 1$$

と云う X の2次方程式があって、 a と c はその解だと言ってるんです。

この2次方程式は整理すれば

$$(b^2 - 1)X^2 + 2bX + 3 - b^2 = 0$$

ですから、解と係数の関係から

$$a + c = -2\frac{b}{b^2 - 1}, \quad ac = \frac{3 - b^2}{b^2 - 1}$$

である事がわかります。そこで、

$$\begin{aligned} (ca + 2)^2 &= \left(\frac{3 - b^2}{b^2 - 1} + 2\right)^2 = \left(\frac{b^2 + 1}{b^2 - 1}\right)^2 \\ (c + a)^2 + 1 &= \frac{4b^2}{(b^2 - 1)^2} + 1 = \frac{4b^2 + (b^2 - 1)^2}{(b^2 - 1)^2} = \frac{(b^2 + 1)^2}{(b^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

と計算してみると

$$(ca + 2)^2 = (c + a)^2 + 1$$

であって、これこそは直線 CA が円 $x^2 + y^2 = 1$ と接する条件に他なりませんでした。

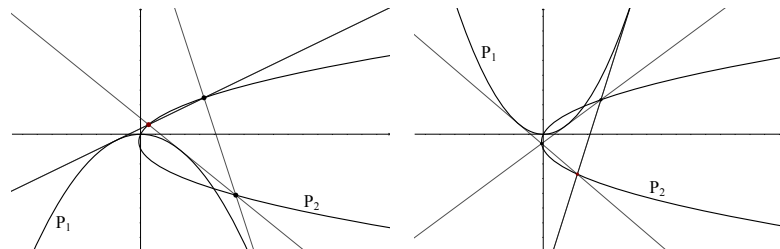
以上により、三本目の接線が直線 CA となって元の点 A に帰って来ます。

Exercise

基本演習 1 x_0, y_0 は任意の実数とします。放物線 $y = (x - x_0)^2 + y_0$ 上の点 A から放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に向かって接線を引きます。このときこの接線がもう一度放物線 $y = (x - x_0)^2 + y_0$ と交わった点を B として、今度はこの点 B から放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に接線を引きます。さらにこの接線がもう一度放物線 $y = (x - x_0)^2 + y_0$ と交わった点を C としたときに、直線 CA が放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に接する事を示してください。

基本演習 2 p は0でない任意の実数とします。放物線 $P_2: x = (y + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}$ 上の、放物線 $P_1: y = px^2$ ($p \neq 0$) の外部にある点 A から放物線 P_1 に向かって接線を引き、この接線がまた放物線 P_2 と交わった点を B とします。

次に点 B から放物線 P_1 に接線を引き、また放物線 P_2 と交わった点を C とします。このとき直線 CA が放物線 P_1 に接することを示してください。



基本演習 3 $(2, -4)$ を中心とした半径 2 の円周上の点 A と直線 $3x + 4y - 15 = 0$ 上の点 B の 2 点間の距離が最も短くなる場合の各点 A, B の座標を求めて下さい (点と直線の距離の公式は使わない事)。

基本演習 4 点と直線の距離の式を、出来るだけたくさん、異なった方法で示してください。

基本演習 5 (1) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ が次のように有理関数によってパラメータ表示されることを確認してください (点 $(-1, 0)$ は除きます) :

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad y = \frac{2t}{1-t^2}, \quad t \neq \pm 1$$

(2) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ と円 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ があります。双曲線上の点で円の外部にある点から出発して円に接線を引き、その接線が再び双曲線と交わった点からもう一度別の接線を引き、これを繰り返すと、どこから出発しても 3 回で元の点に戻る事を証明して下さい。

基本演習 6 (1) 一般に、円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ 上の点 (p_1, p_2) に於ける円の接線は、

$$(p_1 - a)(x - a) + (p_2 - b)(y - b) = c^2$$

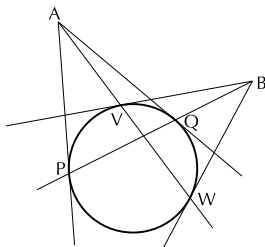
である事を示して下さい。

(2) 円 $x^2 + y^2 = 1$ に外部の点 $A(a_1, a_2)$ から引いた 2 本の接線の接点を $P(p_1, p_2), Q(q_1, q_2)$ とするとき接線 AP および AQ の方程式を求め、これを使って直線 PQ の方程式が $a_1x + a_2y = 1$ となる事を証明して下さい。

(3) 更に直線 PQ 上に円の外部の点 $B(b_1, b_2)$ を取ったとき $a_1b_1 + a_2b_2 = 1$ が成り立つ事を示して下さい。

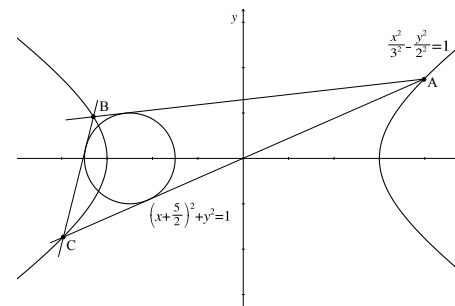
(4) 点 B から円に引いた 2 本の接線の接点を $V(v_1, v_2), W(w_1, w_2)$ として (2) と同様にして直線 VW の方程式を求めて下さい。

(5) 3 点 A, V, W は一直線上にある事を示して下さい。



発展演習 7 双曲線 $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ 上の点 A から円 $(x + \frac{5}{2})^2 + y^2 = 1$ に向かって接線を引き、その接線がもう一度双曲線と交わった点を B とします。今度は点 B から同様に円に接線を引き (さっきとは別の接線にします)、また双曲線と交わった点を C とします。

このとき、点 C から円に引いた接線は点 A を通ることを示して下さい。ただし、点 A は円の外部にあるとします。



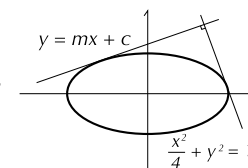
発展演習 8 [1990 京大前期理系に類題] 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の内部に円 $x^2 + y^2 = 1$ があるとします ($a, b > 0$)。楕円周上の任意の点から出発して内部の円に接線を引き、これを繰り返します。3 回接線を書いて元の出発点に戻って来るための a, b の条件を求めて下さい。

発展演習 9 [2002 センター試験に類題] 円周 $(x - \sqrt{3})^2 + y^2 = 9$ 上の点から出発してこの円の内部にある別の円 $x^2 + y^2 = 1$ に接線を引き、これを繰り返します。どの点から出発しても 3 回接線を書いた時にまた出発点に戻って来る事を証明して下さい。

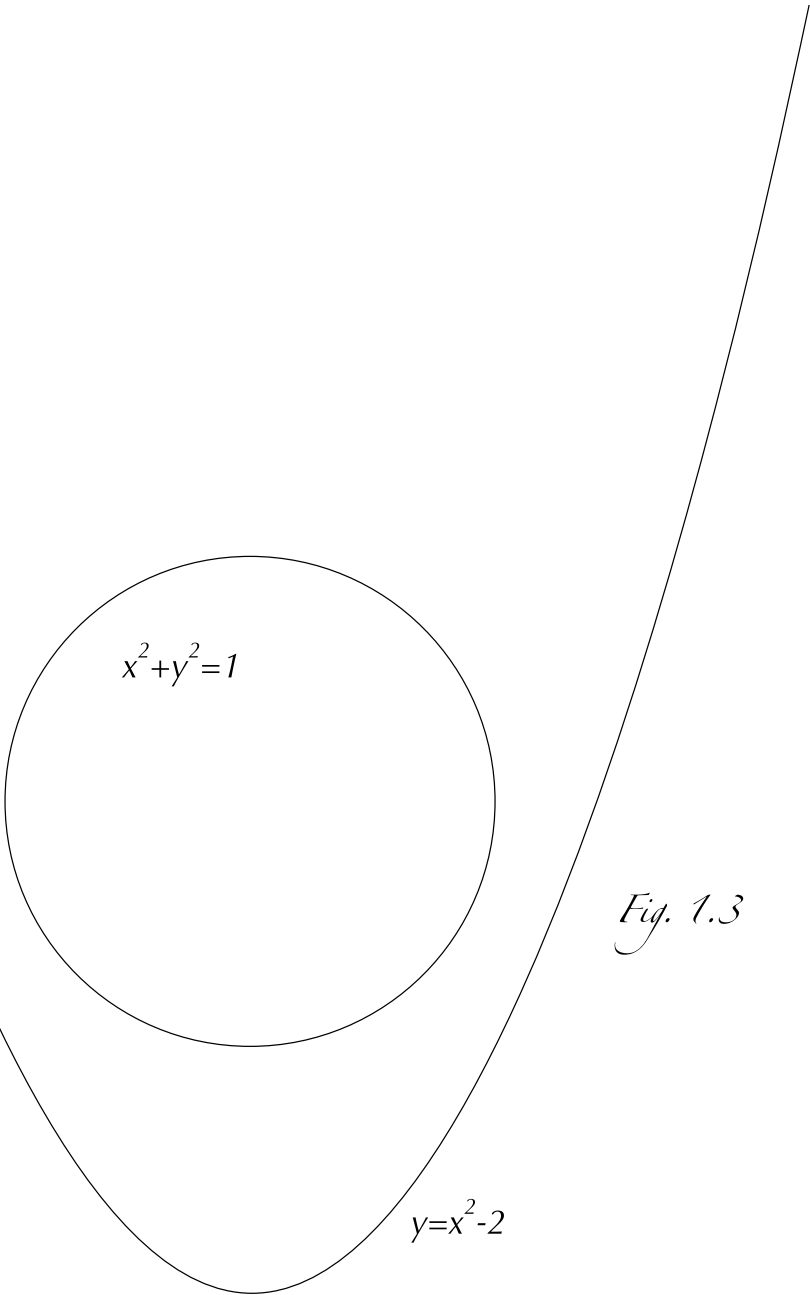
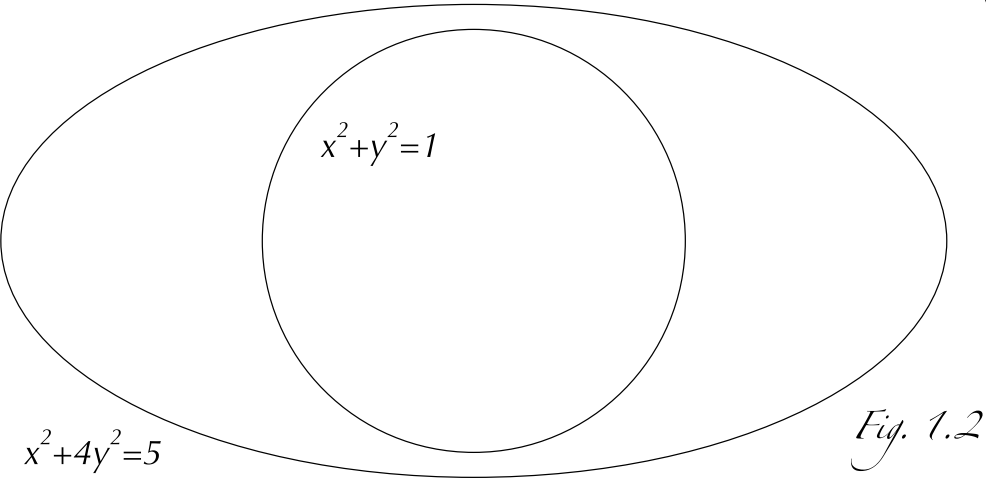
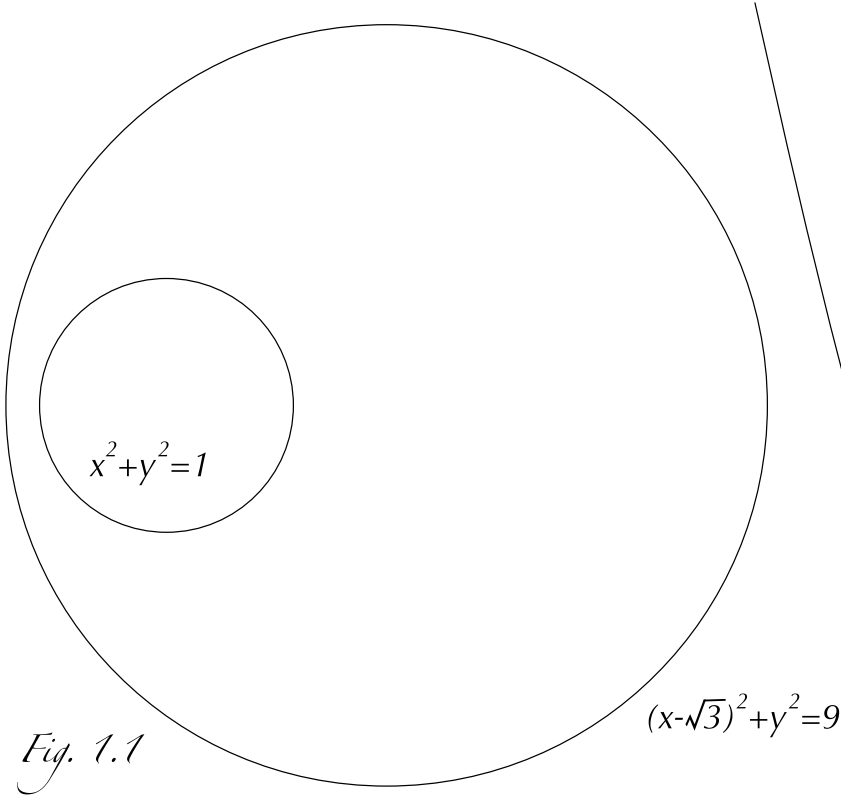
発展演習 10 [1980 東大編入試に類題] 楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ において、

(1) 傾き m の接線 $y = mx + c$ の切片 c を m を使って表して下さい。

(2) 直交する接線の交点の軌跡が円になる事を示して下さい。



発展演習 11 楕円 $x^2 + 4y^2 = 5$ とその内部にある円 $x^2 + y^2 = 1$ を考えます。楕円周上の勝手な点から出発して円に接線を引き、その接線が再び楕円周と交わった点からもう一度別の接線を書くのを繰り返すと、どこから出発しても 4 回で元の点に戻る事を証明して下さい。



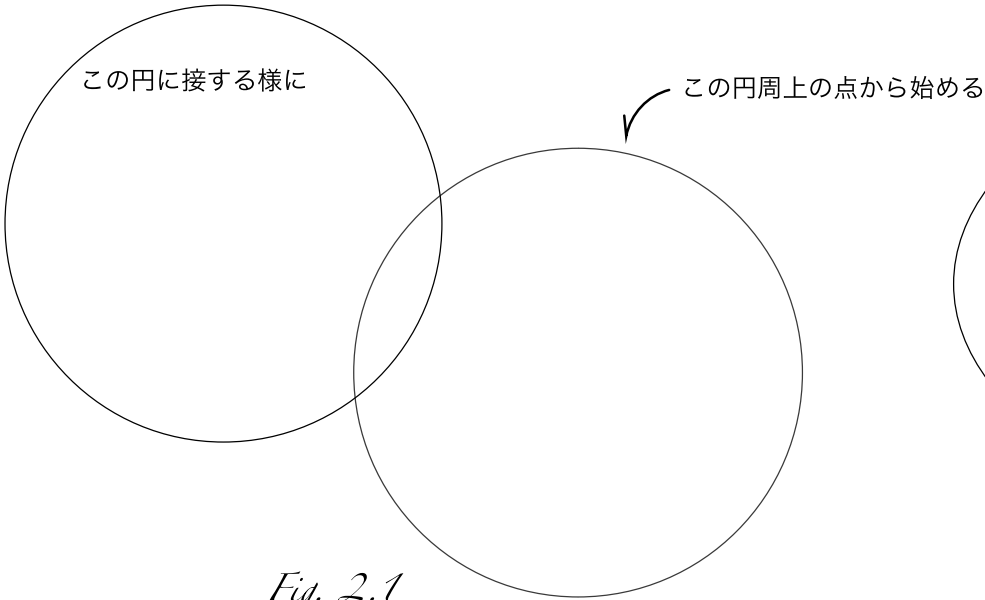


Fig. 2.1

